Module : Suites et séries de fonctions.

Notation *: On notera que $\mathbb{K}$ est $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soit $X \subset \mathbb{K}$ un ensemble non vide. On note $\mathscr{F}(X, \mathbb{K})$ l'ensemble des fonctions* ***définies*** *sur X à valeurs dans $\mathbb{K}$.*

I Suites de fonctions

A Définition

Définition 1

On appelle suite de fonctions une application définie sur $\mathbb{N}$ à valeurs dans $\mathscr{F}(X, \mathbb{K})$.

$$u : \mathbb{N} \to \mathscr{F}(X, \mathbb{K})$$

Comme pour les suites numériques, on privilégiera la notation u_n plutôt que $u(n)$ qui ici désignera une fonction.

B Les différents types de convergence.

Définition 2 (Convergence simple)

Soit (u_n) une suite de fonctions de $\mathscr{F}(X, \mathbb{K})$ et u une fonction de $\mathscr{F}(X, \mathbb{K})$. On dit que (u_n) converge simplement vers u sur X si :

$$\forall x \in X, \forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant n_0, |u_n(x) - u(x)| \leqslant \varepsilon$$

Autrement dit :

$$\forall x \in X, \lim_{n \to +\infty} u_n(x) = u(x)$$

Définition 3 (Convergence uniforme)

Soit (u_n) une suite de fonctions de $\mathscr{F}(X, \mathbb{K})$ et u une fonction de $\mathscr{F}(X, \mathbb{K})$. On dit que (u_n) converge uniformément vers sur X si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant n_0,\ \forall x \in X, \quad |u_n(x) - u(x)| < \varepsilon$$

Définition 4

Soit f une fonction de $\mathscr{F}(X, \mathbb{K})$. On notera :

$$\sup_{x \in X} (|f(x)|) = \|f\|_{\infty, X}$$

Si f n'est pas bornée ce sup vaut $+\infty$.

Proposition 1

Soit (u_n) une suite de fonctions de $\mathscr{F}(X,\mathbb{K})$ et u une fonction de $\mathscr{F}(X,\mathbb{K})$.

$$(u_n)\ \textbf{converge uniformément}\ \text{ vers } u \Leftrightarrow \left(\lim_{n\to+\infty}\|u_n-u\|_{\infty,X}=0\right)$$

Proposition 2

La convergence uniforme d'une suite de fonction (vers une fonction u) entraine la convergence simple (vers cette fonction u)

Définition 5 (Critère de Cauchy)

Soit (un) une suite de fonctions de $\mathscr{F}(X,\mathbb{K})$. On dit qu'elle vérifie le **critère de Cauchy uniforme** si :

$$\forall\varepsilon>0,\exists N\in\mathbb{N},\forall p,q\geqslant N,\forall x\in X,\qquad |u_p(x)-u_q(x)|<\varepsilon$$

Ou ce qui est équivalent :

$$\forall\varepsilon>0,\exists N\in\mathbb{N},\forall p,q\geqslant N,\qquad \|u_p(x)-u_q(x)\|_{\infty,X}<\varepsilon$$

Proposition 3

Soit (u_n) une suite de fonctions de $\mathscr{F}(X,\mathbb{K})$. Le critère de Cauchy uniforme et équivalent à la converge uniformément. Il existe donc dès lors une fonction u de $\mathscr{F}(X,\mathbb{K})$ vers laquelle la suite des (u_n) converge uniformément.

Notation : Soit $a\in\mathbb{K}$ et $r>0$, on notera $B(a,r)=\{x\in\mathbb{K},|x-a|\leqslant r\}$ voisinage de a.

Définition 6

Soit (u_n) une suite de fonctions de $\mathscr{F}(X,\mathbb{K})$, soit u une fonction de $\mathscr{F}(X,\mathbb{K})$.
On dit que la suite de fonction (u_n) converge localement uniformément sur X vers u si :

$$\forall x\in X,\exists\eta>0,\ \text{tel que}\ \ (u_n)\ \text{converge uniformément sur}\ \ B(x,\eta)$$

Proposition 4

Pour une suite de fonction de $\mathscr{F}(X,\mathbb{K})$ la convergence locale uniforme est équivalente à la convergence uniforme sur tout compact de X.

C Convergence uniforme et continuité

Proposition 5

Soit (u_n) une suite de fonctions de $\mathscr{F}(X,\mathbb{K})$ **continues** en $x_0\in X$, **convergeant uniformément** vers une fonction u de $\mathscr{F}(X,\mathbb{K})$ alors u est **continue** en x_0.

D Convergence uniforme et dérivation

Rappel : Inégalité des accroissements finis : Si f est une fonction définie de $[a,b] \subset \mathbb{R}$ et dérivable sur $]a,b[$, alors :

$$|f(b)-f(a)| \leqslant \sup_{x\in]a,b[} |f'(x)| \times |b-a|$$

Définition 7 (généralisation dans $\mathbb{C}$)

Si f est une fonction définie de $\Omega \subset \mathbb{C}$ un ouvert de $\mathbb{C}$ à valeur dans $\mathbb{C}$.
Alors f sera dite dérivable en $z_0 \in \Omega$, si :

$$\frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0} \text{ admet une limite en } z_0$$

Cette limite est notée $f'(z_0)$.

Théorème 6 (des accroissements finis sur $\mathbb{C}$)

Si f est une fonction définie de $\Omega \subset \mathbb{C}$ un ouvert de $\mathbb{C}$ à valeur dans $\mathbb{C}$ et est dérivable sur Ω.
Si $a, b \in \Omega$, alors :

$$|f(b)-f(a)| \leqslant \sup_{z\in]a,b[} |f'(z)| \times |b-a|$$

prévoir graphique pour illustrer le segment.

Théorème 7

Soit (u_n) une suite de fonctions de $\mathscr{F}(X,\mathbb{K})$, dérivable sur X, **où X cette fois est un ouvert de** $\mathbb{K}$, telle que :

- La suite (u_n) converge simplement sur Ω vers u définie sur X,
- La suite (u'_n) converge localement uniformément sur X vers g définie sur X,

Alors :

- La suite (u_n) converge localement uniformément sur X vers u,
- u est dérivable sur X avec $u' = g$.

Corolaire 8

Avec les hypothèses du théorème précédent si les fonctions (u_n) sont $\mathscr{C}^1$ alors u est $\mathscr{C}^1$.

E Convergence et intégration

Théorème 9

Soit (f_n) une suite de fonctions de $\mathscr{C}([a,b],\mathbb{K})$ (ensemble des fonctions continues sur $[a,b]$) convergeant uniformément vers f sur $[a,b]$ alors f est continue sur $[a,b]$ (voir proposition 3) et :

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(t)\mathrm{d}t$$

II Série de fonctions

A Types de convergences

Définition 8

On dit que la série de fonction $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ où (u_n) est une suite de fonction de $\mathscr{F}(X,\mathbb{K})$ convergence simplement (respectivement uniformément, respectivement Cauchy-Uniforme respectivement localement uniformément) si la suite constituée des sommes partielles converge simplement (respectivement uniformément respectivement Cauchy-Uniformément respectivement localement uniformément) .

Proposition 10

Dés lors les résultats connues pour les suites s'applique aux séries. Si l'on considère une suite de fonction (u_n) de $\mathscr{F}(X,\mathbb{K})$. Alors :

- Si la série $\sum u_n$ converge uniformément sur X vers S et que les u_n sont continues en $x_0 \in X$ alors S est continues en x_0
- Si la série $\sum u_n$ converge uniformément sur X vers S et que les u_n sont continues sur X alors S est continues X
- $\sum u_n$ converge uniformément sur X si et seulement si $\sum u_n$ vérifie le critère de Cauchy-Uniforme.

Définition 9

On dit que la série de fonctions $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ où (u_n) est une suite de fonction de $\mathscr{F}(X,\mathbb{K})$, converge absolument si la série de fonctions $\sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|$

Proposition 11

Si la série de fonctions $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ converge absolument elle converge simplement

Définition 10

On dit que la série de fonctions $\sum u_n$ où les (u_n) sont des fonctions de $\mathscr{F}(X,\mathbb{R})$ converge normalement sur X si et seulement si la série réelle de terme général $\|u_n\|_{\infty,X}$ est convergente.

Proposition 12

La convergence normale une série de fonction $\sum u_n$ sur X implique la convergence uniforme de la série sur X.

B Propriétés de la somme

Théorème 13

Si les suites (u_n) sont continues en $x_0 \in X$, si la série converge uniformément sur un voisinage de x_0 alors sa somme est continue en x_0.
Si les u_n sont continues sur X et que la convergence est localement uniforme sur X alors sa somme est continue sur X.

Théorème 14

Si les suites (u_n) sont continues en $x_0 \in X$, si la série converge uniformément sur un voisinage de x_0 alors sa somme est continue en x_0.

C Échange somme et intégrale