Chapitre 5 : Dérivation.

A Nombre dérivé en a d'une fonction

Définition 1

Soit f une fonction définie sur un intervalle I.

- Pour tout nombre réel $a \in I$ non nul et tel que $(a+h) \in I$, on appelle taux d'accroissement de la fonction f en a, le nombre
$$\tau_a(h) = \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$
- On dit que la fonction f est **dérivable** en a, lorsque le taux d'accroissement $\tau_a(h)$ tend vers un nombre L lorsque h tend vers 0.
- Ce nombre L, lorsqu'il existe, est appelé **le nombre dérivé** de f en a, et est noté $f'(a)$:
$$f'(a) = \lim_{h\to 0} \tau_a(h) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = L$$
- Le nombre dérivé $f'(a)$, lorsqu'il existe, est le coefficient directeur de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse a.

B Formules de dérivation.

Dérivées des fonctions usuelles

u	Dérivée u'	Sur
$k \in \mathbb{R}$	0	$\mathbb{R}$
x	1	$\mathbb{R}$
x^2	$2x$	$\mathbb{R}$
$x^n \quad (n \in \mathbb{N})$	nx^{n-1}	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}^*$
$\frac{1}{x^n}$	$-\frac{n}{x^{n+1}}$	$\mathbb{R}^*$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0;+\infty[$
$\cos x$	$-\sin x$	$\mathbb{R}$
$\sin x$	$\cos x$	$\mathbb{R}$
$\tan x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$. $1+\tan^2 x$	$\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{2}+k\pi\right\}_{k\in\mathbb{Z}}$
e^x	e^x	$\mathbb{R}$

.

Opérations sur les dérivées

u et v désignent deux fonctions quelconques, définies et dérivables sur un intervalle I.

Fonction	Dérivée
$ku,\ k \in \mathbb{R}$	ku'
$u+v$	$u'+v'$
uv	$u'v+uv'$
$\frac{u}{v}$	$\frac{u'v-uv'}{v^2}$
u^2	$2u'u$
$\frac{1}{u}$	$-\frac{u'}{u^2}$
$u^n \ (n \in \mathbb{Z}^*)$	$nu'u^{n-1}$
$\frac{1}{u^n}$	$\frac{-nu'}{u^{n+1}}$
$\sqrt{u}$	$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$
e^u	$u'e^u$
$\cos(u)$	$-u' \times \sin \circ u$
$\sin(u)$	$u' \times \cos \circ u$

C Équation de la tangente

Proposition 1

Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I, et $a \in I$.
Alors, l'équation réduite de la tangente à la courbe représentative $\mathcal{C}_f$ de f au point d'abscisse α est :

$$y = f'(a)(x-a) + f(a) .$$

D Sens de variation d'une fonction

Proposition 2

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.

- Si pour tout $x \in I$, $f'(x) > 0$, alors f est strictement croissante sur I.
- Si pour tout $x \in I$, $f'(x) < 0$, alors f est strictement décroissante sur I.
- Si pour tout $x \in I$, $f'(x) = 0$, alors f est constante sur I.

E Éxtrema d'une fonction

Définition 2

Soit f une fonction définie sur un intervalle I.

- Un **extremum** est un minimum ou un maximum.
- f présente un **maximum local** $m = f(x_0)$ si il existe un intervalle $J \subset I$ tel que pour tout $x \in J$, $f(x) \leqslant f(x_0)$.
- f présente un **minimum local** $m = f(x_0)$ si il existe un intervalle $J \subset I$ tel que pour tout $x \in J$, $f(x) \geqslant f(x_0)$.
- L'extremum est dit **global** lorsque $J = I$.

Proposition 3

Soit f une fonction définie sur un intervalle $]a, b[$. Si $f(x_0)$ est un extremum local sur l'intervalle $]a; b[$, alors $f'(x_0) = 0$.
La courbe $\mathcal{C}_f$ représentative de la fonction f admet une tangente horizontale au point $(x_0\ ;\ f(x_0))$.