Baccalauréat S Pondichéry 8 avril 2014 et Liban 11 juin 2009

EXERCICE 1 **4 points**

Commun à tous les candidats

Dans cet exercice, sauf indication contraire, les résultats seront arrondis au centième.

1. La durée de vie, exprimée en années, d'un moteur pour automatiser un portail fabriqué par une entreprise A est une variable aléatoire X qui suit une loi exponentielle de paramètre λ, où λ est un réel strictement positif.
   On sait que $P(X \leqslant 2) = 0,15$.
   Déterminer la valeur exacte du réel λ.

Dans la suite de l'exercice on prendra $0,081$ pour valeur de λ.

2. **a.** Déterminer $P(X \geqslant 3)$.
   b. Montrer que pour tous réels positifs t et h, $P_{X \geqslant t}(X \geqslant t+h) = P(X \geqslant h)$.
   c. Le moteur a déjà fonctionné durant 3 ans. Quelle est la probabilité pour qu'il fonctionne encore 2 ans ?
   d. Calculer l'espérance de la variable aléatoire X et donner une interprétation de ce résultat.
3. **Dans la suite de cet exercice, on donnera des valeurs arrondies des résultats à 10^{-3}**
   L'entreprise A annonce que le pourcentage de moteurs défectueux dans la production est égal à 1 %. Afin de vérifier cette affirmation 800 moteurs sont prélevés au hasard. On constate que 15 moteurs sont détectés défectueux.
   Le résultat de ce test remet-il en question l'annonce de l'entreprise A ? Justifier. On pourra s'aider d'un intervalle de fluctuation.

EXERCICE 2 **8 points**

Commun à tous les candidats

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \ln\left(1 + \mathrm{e}^{-x}\right) + \frac{1}{3}x.$$

La courbe $(\mathscr{C})$ représentative de la fonction f dans le plan muni d'un repère orthogonal est donnée en annexe.
Cette annexe sera complétée et remise avec la copie à la fin de l'épreuve.

Partie A

1. **a.** Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.
   b. Montrer que la droite (D) d'équation $y = \frac{1}{3}x$ est asymptote à la courbe $(\mathscr{C})$. Tracer (D).
   c. Étudier la position relative de (D) et de $(\mathscr{C})$.
   d. Montrer que pour tout réel x, $f(x) = \ln\left(\mathrm{e}^{x} + 1\right) - \frac{2}{3}x$.
   e. En déduire la limite de f en $-\infty$.
2. **a.** On note f' la fonction dérivée de la fonction f.
   Montrer que pour tout x réel, $f'(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{x} - 2}{3\left(\mathrm{e}^{x} + 1\right)}$.
   b. En déduire les variations de la fonction f.

Partie B

Soit n un entier naturel non nul. On appelle d_n, l'aire, en unités d'aire, du domaine du plan délimité par la courbe $(\mathscr{C})$, la droite (D) d'équation $y = \frac{1}{3}x$ et les droites d'équations $x = 0$ et $x = n$.

1. Justifier que pour tout entier naturel n non nul, $d_n = \displaystyle\int_0^n \ln\left(1 + \mathrm{e}^{-x}\right)\,\mathrm{d}x$.
2. On admet que pour tout réel x, $\ln\left(1 + \mathrm{e}^{-x}\right) \leqslant \mathrm{e}^{-x}$.
   Montrer que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, $d_n \leqslant 1$. La suite $(d_n)_{n \geqslant 1}$ est-elle convergente ?

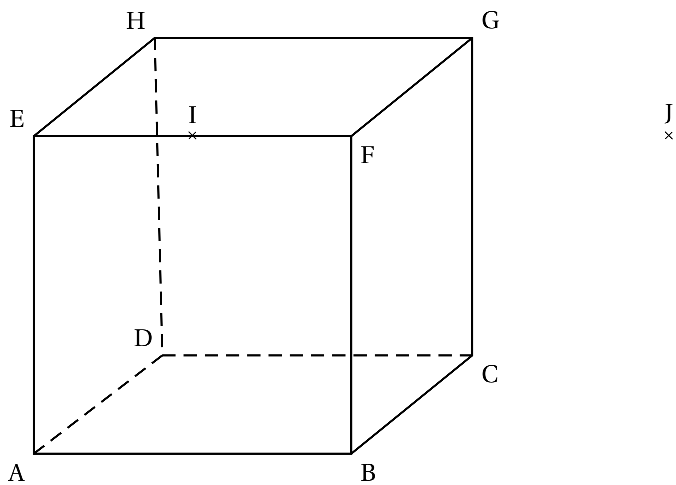
Partie C

Dans cette partie, on cherche à mettre en évidence une propriété de la courbe $(\mathscr{C})$.
On note (T) la tangente à la courbe $(\mathscr{C})$ au point d'abscisse 0.

1. Calculer le coefficient directeur de (T) puis construire (T) sur le graphique.
2. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*
   Soient M et N deux points de la courbe $(\mathscr{C})$ d'abscisses non nulles et opposées. Montrer que la droite (MN) est parallèle à la droite (T).

EXERCICE 3 **4 points**
Commun à tous les candidats

On considère un cube ABCDEFGH d'arête de longueur 1. On désigne par I le milieu de [EF] et par J le symétrique de E par rapport à F.
Dans tout l'exercice, l'espace est rapporté au repère orthonormal $\left(\text{A}\,;\,\overrightarrow{\text{AB}},\,\overrightarrow{\text{AD}},\,\overrightarrow{\text{AE}}\right)$.



1. **a.** Déterminer les coordonnées des points I et J.
   b. Vérifier que le vecteur $\overrightarrow{\text{DJ}}$ est un vecteur normal au plan (BGI).
   c. En déduire une équation cartésienne du plan (BGI).
   d. Calculer la distance du point F au plan (BGI).
2. On note (Δ) la droite passant par F et orthogonale au plan (BGI).
   a. Donner une représentation paramétrique de la droite (Δ).
   b. Montrer que la droite (Δ) passe par le centre K de la face ADHE.
   c. Montrer que la droite (Δ) et le plan (BGI) sont sécants en un point, noté L, de coordonnées $\left(\dfrac{2}{3}\,;\,\dfrac{1}{6}\,;\,\dfrac{5}{6}\right)$.
   d. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, sera prise en compte dans l'évaluation.*
   Le point L est-il l'orthocentre du triangle BGI ?