Séance du 16 décembre

Exercice 1

On définie la suite (z_n) définie à valeur dans $\mathbb{C}$ par :

$$\begin{cases} z_0 = i \\ z_{n+1} = \dfrac{1}{3} z_n + i \end{cases}$$

1. Résoudre l'équation $z = \dfrac{1}{3}z + i$
2. On pose $\alpha_n = \left| z_n - \dfrac{3i}{2} \right|$.
   (a) Montrer que (α_n) est une suite géométrique.
   (b) En déduire la limite de α_n.
   (c) Si l'on note M_n les points d'affixes z_n et M le point d'affixe $\dfrac{3i}{2}$. Comment interpréter le résultat précédent.
3. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ z_n = -\dfrac{1}{3^n} \times \dfrac{i}{2} + \dfrac{3i}{2}$

Exercice 2

EXERCICE 5 **5 points**

Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

Un jeu de hasard sur ordinateur est paramétré de la façon suivante :

- Si le joueur gagne une partie, la probabilité qu'il gagne la partie suivante est $\dfrac{1}{4}$;
- Si le joueur perd une partie, la probabilité qu'il perde la partie suivante est $\dfrac{1}{2}$;
- La probabilité de gagner la première partie est $\dfrac{1}{4}$.

Pour tout entier naturel n non nul, on note G_n l'évènement « la n^{e} partie est gagnée » et on note p_n la probabilité de cet évènement. On a donc $p_1 = \dfrac{1}{4}$.

1. Montrer que $p_2 = \dfrac{7}{16}$.

2. Montrer que, pour tout entier naturel n non nul, $p_{n+1} = -\dfrac{1}{4}p_n + \dfrac{1}{2}$.

3. On obtient ainsi les premières valeurs de p_n :

n	1	2	3	4	5	6	7
p_n	0,25	0,437 5	0,390 6	0,402 3	0,399 4	0,400 1	0,399 9

Quelle conjecture peut-on émettre ?

4. On définit, pour tout entier naturel n non nul, la suite (u_n) par $u_n = p_n - \dfrac{2}{5}$.

a. Démontrer que la suite (u_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison.

b. En déduire que, pour tout entier naturel n non nul, $p_n = \dfrac{2}{5} - \dfrac{3}{20}\left(-\dfrac{1}{4}\right)^{n-1}$.

c. La suite (p_n) converge-t-elle ? Interpréter ce résultat.

Exercice 3

Exercice 4 **5 points**

Pour les candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 - x + \frac{3}{2}.$$

Soit a un réel positif.
On définit la suite (u_n) par $u_0 = a$ et, pour tout entier naturel n : $u_{n+1} = f(u_n)$.

Le but de cet exercice est d'étudier le comportement de la suite (u_n) lorsque n tend vers $+\infty$, suivant différentes valeurs de son premier terme $u_0 = a$.

1. À l'aide de la calculatrice, conjecturer le comportement de la suite (u_n) lorsque n tend vers $+\infty$, pour $a = 2,9$ puis pour $a = 3,1$.

2. Dans cette question, on suppose que la suite (u_n) converge vers un réel ℓ.

- **a.** En remarquant que $u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n^2 - u_n + \frac{3}{2}$, montrer que $\ell = \frac{1}{2}\ell^2 - \ell + \frac{3}{2}$.
- **b.** Montrer que les valeurs possibles de ℓ sont 1 et 3.

3. Dans cette question, on prend $a = 2,9$.

- **a.** Montrer que f est croissante sur l'intervalle $[1\,;\,+\infty[$.
- **b.** Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a : $1 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n$.
- **c.** Montrer que (u_n) converge et déterminer sa limite.

4. Dans cette question, on prend $a = 3,1$ et on admet que la suite (u_n) est croissante.

- **a.** À l'aide des questions précédentes montrer que la suite (u_n) n'est pas majorée.
- **b.** En déduire le comportement de la suite (u_n) lorsque n tend vers $+\infty$.
- **c.** L'algorithme suivant calcule le plus petit rang p pour lequel $u_p > 10^6$.
  Recopier et compléter cet algorithme.
  P est un nombre entier et U est un nombre réel.

```
P ← 0
U ……

Tant que …
    P ← ……
    U ← ……
Fin Tant que
```

Réponse de l'exercice 1 .

1. Résoudre l'équation $z = \frac{1}{3}z + i \Leftrightarrow \frac{2}{3}z = i \Leftrightarrow z = \frac{3}{2}i$
2. On pose $\alpha_n = \left|z_n - \frac{3i}{2}\right|$.
   (a) $\alpha_{n+1} = \left|z_{n+1} - \frac{3i}{2}\right| = \left|\frac{1}{3}z_n + i - \frac{3i}{2}\right| = \left|\frac{1}{3}z_n - \frac{i}{2}\right| = \left|\frac{1}{3}\left(z_n - \frac{3i}{2}\right)\right| = \frac{1}{3}\left|z_n - \frac{3i}{2}\right| = \frac{1}{3}\alpha_n$

   Donc (α_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{3}$ et de premier terme $\alpha_0 = \left|z_0 - \frac{3i}{2}\right| = |-\frac{i}{2}| = \frac{1}{2}$.

   Donc l'expression de α_n est $\alpha_n = \frac{1}{2 \times 3^n}$

   (b) En déduire la limite de α_n. Comme $\left|\frac{1}{3} < 1\right|$ alors $\lim\limits_{n \mapsto +\infty} \alpha_n = 0$

   (c) Si l'on note M_n les points d'affixes z_n et M le point d'affixe $\frac{3i}{2}$. Comment interpréter le résultat précédent.

   On a $MM_n = \left|z_n - z\right| = \alpha_n$. Donc les points M_n se rapprochent du point M.
3. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ z_n = -\frac{1}{3^n} \times \frac{i}{2} + \frac{3i}{2}$.

   On démontre se résultat par récurrence. L'hypothèse est $P_n :\ z_n = -\frac{1}{3^n} \times \frac{i}{2} + \frac{3i}{2}$

   Initialisation : $z_0 = -\frac{1}{3^0} \times \frac{i}{2} + \frac{3i}{2} = i$. Donc P_0 est vrai.

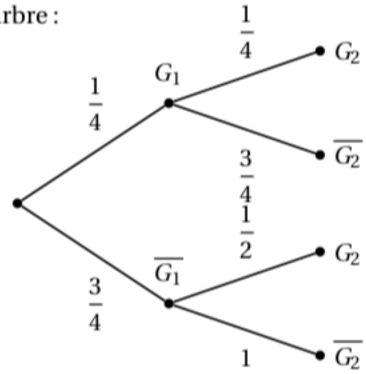
   Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons P_n vrai.

$$z_{n+1} = \frac{1}{3}z_n + i = \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{3^n} \times \frac{i}{2} + \frac{3i}{2}\right) + i = -\frac{1}{3^{n+1}} \times \frac{i}{2} + \frac{i}{2} + i = -\frac{1}{3^{n+1}} \times \frac{i}{2} + \frac{3i}{2}$$

   On a donc montrer par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N},\ z_n = -\frac{1}{3^n} \times \frac{i}{2} + \frac{3i}{2}$

Réponse de l'exercice 2

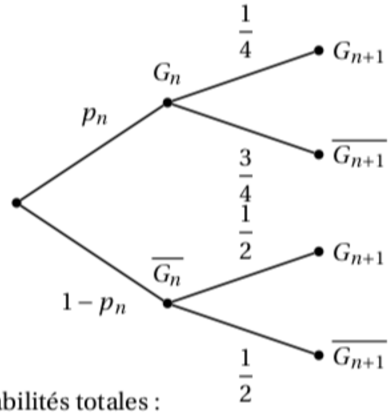
1. Illustrons la situation par un arbre :



Alors : En appliquant la formule des probabilités totales :

$p_2 = p(G_2) = p_{G_1}(G_2)\,p(G_1)) + p_{\overline{G_1}}(G_2)\,p(G_1) = \frac{1}{4}\times\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\times\frac{3}{4} = \frac{1}{16}+\frac{3}{8} = \frac{7}{16}$ donc $\boxed{p_2 = \frac{7}{16}}$

2. Arbre :



D'après la formule des probabilités totales :

$p_{n+1} = p(G_{n+1}) = \frac{1}{4}p_n + \frac{1}{2}(1-p_n) = -\frac{1}{4}p_n + \frac{1}{2}$

Donc :

$$\boxed{p_{n+1} = -\frac{1}{4}p_n + \frac{1}{2}}$$

3. On obtient ainsi les premières valeurs de p_n :

n	1	2	3	4	5	6	7
p_n	0,25	0,4375	0,3906	0,4023	0,3994	0,4001	0,3999

On peut conjecturer que la suite converge vers 0,4.

4. On définit, pour tout entier naturel n non nul, la suite (u_n) par $u_n = p_n - \frac{2}{5}$.

a. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n_{n+1} = p_{n+1} - \frac{2}{5} = -\frac{1}{4}p_n + \frac{1}{2} - \frac{2}{5} = -\frac{1}{4}p_n + \frac{1}{10} = -\frac{1}{4}\left(p_n - \frac{1}{5}\right) = -\frac{1}{4}u_n$

donc $\boxed{u_{n+1} = -\frac{1}{4}u_n}$.

La suite (u_n) est donc géométrique, de raison $q = -\frac{1}{4}$.

b. $u_1 = p_1 - \frac{2}{5} = \frac{1}{4} - \frac{2}{5} = -\frac{3}{20}$.

Comme la suite (u_n) est géométrique, on a, pour tout n, $u_n = u_1 q^{n-1} = -\frac{3}{20}\times\left(-\frac{1}{4}\right)^{n-1}$.

On en déduit : $p_n = u_n + \frac{2}{5} = \frac{2}{5} - \frac{3}{20}\times\left(-\frac{1}{4}\right)^{n-1}$

c. $-1 < -\frac{1}{4} < 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(-\frac{1}{4}\right)^{n-1} = 0$ d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n = \frac{2}{5} = 0,4$ donc la conjecture faite à partir du tableau est validée.

Réponse de l'exercice 3

Exercice 4 **5 points**

Pour les candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité

1. Avec $a = 2,9$ il semble que la suite (u_n) soit décroissante.
   Avec $a = 3,1$ il semble que la suite (u_n) soit croissante.

2. **a.** Les termes u_n et u_{n+1} ayant pour limite ℓ, on a donc $\ell = \frac{1}{2}\ell - \ell + \frac{3}{2}$.

   b. $\ell = \frac{1}{2}\ell - \ell + \frac{3}{2} \iff 2\ell = \ell^2 - 2\ell + 3 \iff \ell^2 - 4\ell + 3 = 0$
   1 est solution évidente de cette équation que l'on peut écrire $(\ell - 1)(\ell - 3) = 0$.
   L'autre solution est donc $\ell = 3$.
   Si elle converge cela ne peut être que vers 1 ou 3.

3. **a.** $a = 2,9$. f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et sur cet intervalle :
   $f'(x) = x - 1$; donc $f'(x) \geqslant 0$ pour $x \geqslant 1$: la fonction f est croissante sur $[1 ; +\infty[$.

   b. *Initialisation* : $u_0 = 2,9$ et $u_1 : \frac{1}{2} \times 2,9^2 - 2,9 + \frac{3}{2} = 2,805$.
   On a bien $1 \leqslant u_1 \leqslant u_0$.
   Hérédité : supposons que pour $n \in \mathbf{N}$, on ait : $1 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n$:
   puisque la fonction f est croissante sur $[1 ; +\infty[$, les images par f des trois termes de cet encadrement sont rangés dans le même ordre :
   $f(1) \leqslant f(u_{n+1}) \leqslant f(u_n)$.
   Soit avec $f(1) = \frac{1}{2} - 1 + \frac{3}{2} = 1 : 1 \leqslant u_{n+2} \leqslant u_{n+1}$: l'encadrement est vrai au rang $n+1$.
   On a montré que l'encadrement est vrai au rang 0 et que s'il est vrai au rang n, il l'est aussi au rang $n+1$.
   D'après le principe de récurrence on a donc démontré que :
   pour tout entier naturel n, on a : $1 \leqslant u_{n+1} \leqslant u_n$.

   c. D'après le résultat précédent la suite (u_n) décroit et est minorée par 1 : elle est donc convergente vers un nombre $\ell \geqslant 1$.

4. **a.** On a vu que si la suite converge ce ne peut être que vers 1 ou 3, ce qui n'est pas possible puisque le premier terme est $u_0 = 3,1$ et que la suite est croissante : cette suite n'est donc pas majorée.

   b. Par conséquent on a $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$.

   c.

```
P ← 0
U ← 3,1

Tant que U ⩽ 10^6
    P ← P + 1
    U ← (1/2)U^2 − U + 3/2
Fin Tant que
```

Rem. L'algorithme s'arrête à u_9.