# ∽ Baccalauréat ES/L Antilles-Guyane 18 juin 2019 ∾

**Exercice 2** **5 points**

**Candidats de ES ayant suivi l'enseignement de spécialité**

La mairie d'une ville propose une carte jeune annuelle donnant droit à des réductions sur les activités culturelles et de loisirs. La mairie espère que dans l'avenir, au moins 70 % de la population des 12-18 ans possèdent la carte et si oui, en quelle année cela se produirait.

Ces dernières années, lors du renouvellement de la carte, on a constaté que 10 % des possesseurs de la carte ne la rachètent pas. Dans le même temps, 30 % de la population des 12-18 ans qui ne la possédaient pas l'année précédente achètent la carte. On fait l'hypothèse que l'effectif de la population des 12-18 ans est constant et que l'évolution va rester la même pour les prochaines années.

En 2018, 80 % des jeunes de 12-18 ans ne possédaient pas la carte.

On note, pour tout entier naturel $n$, $a_n$ la part de la population des 12-18 ans de la ville possédant la carte l'année $2018+n$, et $b_n$ la part de la population des 12-18 ans ne la possédant pas.

**Partie A**

1. Représenter cette situation par un graphe probabiliste de sommets A et B où le sommet A représente l'état « posséder une carte jeune » et B l'état « ne pas posséder une carte jeune ».
2. Déterminer la matrice de transition $M$ de ce graphe en respectant l'ordre A puis B des sommets.
3. **a.** Vérifier que $a_2 = 0,552$ et $b_2 = 0,448$.

   **b.** Interpréter le coefficient 0,552 dans le contexte de l'énoncé.
4. On note $a$ et $b$ les coefficients de la matrice $P$ correspondant à l'état stable de ce graphe.

   **a.** Montrer que les nombres $a$ et $b$ sont solutions du système $\begin{cases} -0,1a+0,3b & = & 0 \\ a+ \quad b & = & 1 \end{cases}$

   **b.** Justifier que la mairie peut espérer qu'à l'avenir au moins 70 % de la population des 12-18 ans possèdent la carte.

**Partie B**

On admet que pour tout entier naturel $n$, $a_{n+1} = 0,6a_n + 0,3$ et que la suite $(a_n)$ est croissante.

1. On donne l'algorithme suivant dans lequel $A$ est un nombre réel et $N$ est un entier naturel.

```
A ← 0,2
N ← 0
Tant que ...... faire
    A prend la valeur ......
    N prend la valeur ......
Fin Tant Que
```

   Recopier puis compléter les pointillés des lignes 3 à 5 de l'algorithme ci-dessus pour qu'il affiche le nombre d'années nécessaires à la mairie pour atteindre son objectif qu'au moins 70 % de la population des 12-18 ans possèdent la carte.
2. En quelle année l'objectif sera-t-il atteint ?

# Baccalauréat ES Amérique du Nord 30 mai 2013

**EXERCICE 3** **5 points**

**Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité**

Léa est inscrite sur les réseaux sociaux et consulte régulièrement sa page.

On considère que :

- Si Léa s'est connectée un certain jour, la probabilité qu'elle se connecte le lendemain est égale à $0,9$.
- Si Léa ne s'est pas connectée un certain jour, la probabilité qu'elle se connecte le lendemain est égale à $0,8$.

Pour tout entier $n \geqslant 1$, on note $a_n$ la probabilité que Léa se connecte le $n$-ième jour et $b_n$ la probabilité qu'elle ne se connecte pas le $n$-ième jour.
On a donc : $a_n + b_n = 1$.

Le 1er jour, Léa ne s'est pas connectée, on a donc $a_1 = 0$.

1. **a.** Traduire les données par un graphe probabiliste.

   **b.** Préciser la matrice $M$ de transition associée à ce graphe.

   **c.** Déterminer la probabilité que Léa se connecte le troisième jour.

2. Démontrer que, pour tout entier $n \geqslant 1$, on a : $a_{n+1} = 0,1a_n + 0,8$.

3. On considère la suite $(u_n)$ définie, pour tout entier $n \geqslant 1$, par $u_n n = a_n - \dfrac{8}{9}$.

   **a.** Montrer que $(u_n)$ est une suite géométrique, préciser sa raison et son premier terme.

   **b.** Exprimer $u_n$ puis $a_n$ en fonction de $n$.

4. **a.** Déterminer en justifiant la limite de $(a_n)$.

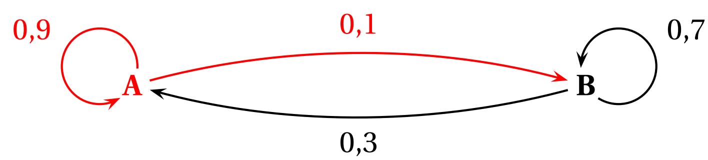
   **b.** Interpréter ce résultat.

**Candidats de ES ayant suivi l'enseignement de spécialité**

La mairie d'une ville propose une carte jeune annuelle donnant droit à des réductions sur les activités culturelles et de loisirs. La mairie espère que dans l'avenir, au moins 70 % de la population des 12-18 ans possèdent la carte et si oui, en quelle année cela se produirait.
Ces dernières années, lors du renouvellement de la carte, on a constaté que 10 % des possesseurs de la carte ne la rachètent pas. Dans le même temps, 30 % de la population des 12-18 ans qui ne la possédaient pas l'année précédente achètent la carte. On fait l'hypothèse que l'effectif de la population des 12-18 ans est constant et que l'évolution va rester la même pour les prochaines années.
En 2018, 80 % des jeunes de 12-18 ans ne possédaient pas la carte.
On note, pour tout entier naturel $n$, $a_n$ la part de la population des 12-18 ans de la ville possédant la carte l'année $2018+n$, et $b_n$ la part de la population des 12-18 ans ne la possédant pas.

**Partie A**

1. Représentons cette situation par un graphe probabiliste de sommets A et B ; A représente l'état « posséder une carte jeune » et B l'état « ne pas posséder une carte jeune ».




2. La matrice $M$ de transition est $M=\begin{pmatrix}0,9 & 0,1\\ 0,3 & 0,7\end{pmatrix}$.

3. **a.** On a $\begin{pmatrix}a_0 & b_0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0,2 & 0,8\end{pmatrix}$.

   Alors $\begin{pmatrix}{}_2 & b_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_0 & b_0\end{pmatrix}M^2=\begin{pmatrix}0,2 & 0,8\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0,84 & 0,16\\ 0,48 & 0,52\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0,552 & 0,448\end{pmatrix}$.

   On en déduit : $\boxed{a_2=0,552}$ et $\boxed{b_2=0,448}$.

   **b.** Cela signifie qu'en 2020, 55,2 % des 12-18 ans possèderont la carte.

4. On note $a$ et $b$ les coefficients de la matrice $P$ correspondant à l'état stable de ce graphe.

   **a.** On doit avoir $\begin{cases}P=PM\\ a+b=1\end{cases} \iff \begin{pmatrix}a & b\end{pmatrix}=\begin{cases}\begin{pmatrix}a & b\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0,9 & 0,1\\ 0,3 & 0,7\end{pmatrix}\\ a+b=1\end{cases}$

   $$\iff \begin{cases}a=0,9a+0,3b\\ b=0,1a+0,7b\\ a+b=1\end{cases} \iff \begin{cases}-0,1a+0,3b=0\\ 0,1a-0,3b=0\\ a+b=1\end{cases} \iff \begin{cases}0,1a-0,3b=0\\ a+b=1\end{cases}.$$

   **b.** D'après la deuxième ligne, on a $b=1-a$. On remplace dans la première ligne ; on trouve :
   $0,1a-0,3(1-a)=0 \iff 0,4a=0,3 \iff 0,4a=0,3 \iff a=\dfrac{3}{4}=0,75$ et par conséquent, $b=0,25$.
   À long terme, 75 % des 12-18 ans posséderont la carte, donc la mairie peut espérer qu'à l'avenir au moins 70 % de la population des 12-18 ans possèdent la carte.

**Partie B**

On admet que pour tout entier naturel $n$, $a_{n+1}=0,6a_n+0,3$ et que la suite $(a_n)$ est croissante.

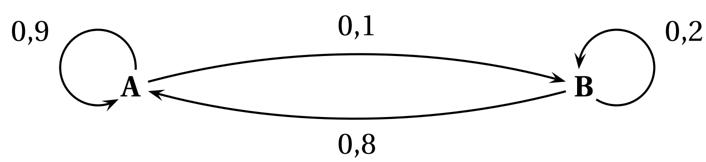
1. Recopions puis compléter les pointillés des lignes 3 à 5 de l'algorithme ci-dessus pour qu'il affiche le nombre d'années nécessaires à la mairie pour atteindre son objectif qu'au moins 70 % de la population des 12-18 ans possèdent la carte.

```
A ← 0,2
N ← 0
Tant que A < 0,7 faire
    A prend la valeur A = 0.6 * A + 0,3
    N prend la valeur N + 1
Fin Tant Que
```

2. La calculatrice donne :
   **a.** $a_4 = 0{,}678\,72 < 7$
   **b.** $a_5 = 0{,}707\,232 > 7$
   . L'objectif sera atteint en 2023.

**Corrigé de l'exercice 3** (enseignement de spécialité)

1. **a.** Appelons $A$ l'état probabiliste « Léa s'est connectée », $B$ l'état probabiliste « Léa ne s'est pas connectée ». On considère que :
   Si Léa s'est connectée un certain jour, la probabilité qu'elle se connecte le lendemain est égale à $0,9$ d'où $p_{A_n}(A_{n+1}) = 0,9$ et $p_{A_n}(B_{n+1}) = 0,1$.
   Si Léa ne s'est pas connectée un certain jour, la probabilité qu'elle se connecte le lendemain est égale à $0,8$ soit $p_{B_n}(A_{n+1}) = 0,8$ et $p_{B_n}(B_{n+1}) = 0,2$.
   On en déduit le graphe probabiliste correspondant à cette situation :




   **b.** La matrice de transition $M$ de ce graphe vérifiant $(a_{n+1}\ \ b_{n+1}) = (a_n\ \ b_n) \times M$ est : $M = \begin{pmatrix} 0,90 & 0,1 \\ 0,80 & 0,20 \end{pmatrix}$.

   **c.** Le 1er jour, Léa ne s'est pas connectée donc l'état initial est $P_1 = (0\ 1)$.
   L'état $P_3$ au jour 3 est :
   $P_3 = P_1 \times M^2 = (0\ 1) \times \begin{pmatrix} 0,90 & 0,1 \\ 0,80 & 0,2 \end{pmatrix}^2 = (0,88\ 0,12)$.
   La probabilité que Léa se connecte le troisième jour est égale à $0,88$.

2. Pour tout entier $n \geqslant 1$,
   $P_{n+1} = P_n \times M \iff \begin{pmatrix} a_{n+1} & b_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_n & b_n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0,9 & 0,1 \\ 0,8 & 0,2 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} a_{n+1} & b_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,9a_n + 0,8b_n & 0,1a_n + 0,2b_n \end{pmatrix}$
   D'où $a_{n+1} = 0,9a_n + 0,8b_n$ avec pour tout entier $n \geqslant 1$, $a_n + b_n = 1$. D'où $a_{n+1} = 0,9a_n + 0,8 \times (1 - a_n) = 0,1a_n + 0,8$.
   Ainsi, pour tout entier $n \geqslant 1$, $a_{n+1} = 0,1a_n + 0,8$.

3. **a.** Pour tout entier $n \geqslant 1$,
   $u_{n+1} = a_{n+1} - \dfrac{8}{9} \iff u_{n+1} = 0,1a_n + 0,8 - \dfrac{8}{9} u_{n+1} = 0,1a_n - \dfrac{4}{45} \iff u_{n+1} = 0,1 \times \left(a_n - \dfrac{8}{9}\right) u_{n+1} = 0,1u_n$.

Donc, pour tout entier $n \geqslant 1$, $u_{n+1} = 0,1u_n$ donc $(u_n)$ est une suite géométrique de raison $0,1$.
Mais
$u_1 = a_1 - \dfrac{8}{9}$, soit $u_1 = -\dfrac{8}{9}$.

$(u_n)$ est une suite géométrique de raison $0,1$ et de premier terme $u_1 = -\dfrac{8}{9}$.

**b.** $(u_n)$ est une suite géométrique de raison $q = 0,1$ et de premier terme $u_1 = -\dfrac{8}{9}$ alors, pour tout entier $n \geqslant 1$, $u_n = u_1 \times q^{n-1}$, soit $u_n = -\dfrac{8}{9} \times 0,1^{n-1}$.

Or pour tout entier $n \geqslant 1$, $u_n = a_n - \dfrac{8}{9} \iff a_n = u_n + \dfrac{8}{9} \iff a_n = -\dfrac{8}{9} \times 0,1^{n-1} + \dfrac{8}{9} \iff a_n = -\dfrac{80}{9} \times 0,1^n + \dfrac{8}{9}$.

Ainsi pour tout entier $n \geqslant 1$, $a_n = -\dfrac{80}{9} \times 0,1^n + \dfrac{8}{9}$.

**4. a.** Comme $0 < 0,1 < 1$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} 0,1^n = 0$ d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} -\dfrac{80}{9} \times 0,1^n = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} -\dfrac{80}{9} \times 0,1^n + \dfrac{8}{9} = \dfrac{8}{9}$.
Soit $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \dfrac{8}{9}$.

Conclusion : la suite $(a_n)$ converge vers $\dfrac{8}{9}$.

**b.** La suite $(a_n)$ convergeant vers $\dfrac{8}{9}$, à partir d'un certain nombre de jours, la probabilité que Léa se connecte chaque jour est égale à $\dfrac{8}{9}$.