Chapitre 6 : Statistique.

Pour ce chapitre, on considère une série statistique X de valeurs $(x_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ (c'est une suite finie de valeurs) d'effectifs n_i pour chaque valeur x_i et d'effectifs total $N = \sum_{i=1}^{n} n_i$.

I Un peu d'histoire.

La science statistique semble exister dès la naissance des premières structures sociales. D'ailleurs, les premiers textes écrits retrouvés étaient des recensements du bétail, des informations sur son cours et des contrats divers. On a ainsi trace de recensements en Chine au $XX^{ième}$siècle av. J.-C. ou en Égypte au $XVIII^{ième}$ siècle av. J.-C.. Ce système de recueil de données se poursuit jusqu'au $XVII^{ième}$ siècle. En Europe, le rôle de collecteur est souvent tenu par des guildes marchandes, puis par les intendants de l'État.
Mais on attribue à l'histoire des statistiques la date de commencement de 1749, bien que l'interprétation du terme « statistique » a changé au cours du temps. Aux temps plus anciens, cette science ne consistait qu'à la collection d'informations sur les états, d'où l'étymologie du nom, de l'allemand Staatskunde. Plus tard, cette définition est étendue à tout type d'information collectée et, encore plus tard, les sciences statistiques incluent l'analyse et l'interprétation de ces données. En termes modernes, les statistiques incluent les ensembles de données, telles celles de la comptabilité nationale et les registres de températures, ainsi que le travail d'analyse, lequel requiert les méthodes de l'inférence statistique.
(Wikipédia)

II Attendus

- Savoir déterminer "à la main", à partir des données du tableau des effectifs :
  - La médiane.
  - Les quartiles.
  - L'étendue.
  - L'écart inter-quartile.
  - Le diagramme en boîte. **1 page 259**
  - La variance.
  - L'écart type.
- Savoir obtenir les éléments précédent à la calculatrice. **2 page 259**
- Savoir interpréter les paramètres de position et de dispersion d'une série statistique et comparer des séries statistiques entre elles. **1 page 261**
- Savoir utiliser et démontrer les formules :
  - $\overline{aX+b} = a\overline{X} + b$.
  - $V(aX+b) = aV(X) + b$
  - $\sigma(aX+b) = |a| \times \sigma(X)$
- Résumer une série statistique. **2 page 261.**

III Un exemple concret :

Exemple 1. On considère une petite évaluation donnée à deux classe (2A et 2B) et noté sur 5 : On obtient les résultats suivants :‘

Résultats dans la classe 2A (série X) :

Indice : i	0	1	2	3	4	5
Notes : x_i	0	1	2	3	4	5
Effectifs : n_i	1	12	2	2	3	10

Résultats dans la classe 2B (Série Y) :

Indice : i	0	1	2	3	4	5
Notes : y_i	0	1	2	3	4	5
Effectifs : n_i	0	2	12	8	4	3

Par exemple l'on peut affirmer qu'en 2A, il y a eu 10 élèves qui ont obtenus une note de 5 sur 5. Dans la série X, on a la valeur de $x_5 = 5$ et l'effectif de cette valeur est $n_i = 10$.

L'effectif total de la série X est :

$$N_A = \sum_{i=1}^{5} n_i = 1 + 12 + 2 + 2 + 3 + 10 = 30$$

On dira qu'il y a 30 élèves en 2A.

IV Paramètres présents dans la série : quartile et boîte à moustache.

A Paramètres de position.

1 Médiane.

Définition 1

Si l'on range les données d'une série statistique X dans l'ordre croissant (N l'effectif total) :

- Si $N = 2p + 1$ (p entier naturel), la médiane est la données de rang p.
- Si $N = 2p$ (p entier naturel non nul), la médiane est la moyenne des données de rang p et de rang $p + 1$.

Remarque 1. On distinguera donc les deux cas : l'effectif total est pair, ou l'effectif total est impair.

Méthode 1

Pour déterminer la médiane de série X des notes de la 2A, on peut procéder un "rangeant" dans l'ordre croissant les valeurs de la série. Avec l'exemple ci-dessus, on obtient :

$$\underbrace{0\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 2}_{14\ notes}\ \underbrace{2\quad 3}_{médiane}\ \underbrace{3\ 4\ 4\ 4\ 5\ 5\ 5\ 5\ 5\ 5\ 5\ 5\ 5\ 5}_{14\ notes}$$

On remarque malheureusement ici qu'il n'y a pas de note "au milieu" :

- Si l'on choisit la $15^{ième}$ qui est 2. On a alors 14 notes en dessous et 15 notes au dessus.
- Si l'on choisit la $16^{ième}$ qui est 2. On a alors 15 notes en dessous et 14 notes au dessus.

On choisit donc de prendre la note moyenne des deux. La médiane est donc $\dfrac{2+3}{2} = 2,5$.

Vidéo 1

Calcul de la médiane.

2 Médiane et effectifs cumulés croissants.

Méthode 2

Si l'on reprend l'exemple précédent (vous compléterez le tableau pour la série Y :

Résultats dans la classe 2A (série X) :

Indice : i	0	1	2	3	4	5
Notes : y_i	0	1	2	3	4	5
Effectifs : n_i	1	12	2	2	3	10
Effectifs cumulés croissants	1	13	15	17	20	30

Ici ces effectifs cumulés croissant signifient :

- La $1^{ière}$ note est 0.
- De la $2^{ième}$ à la $13^{ième}$, ce sont des 1.
- La $14^{ième}$ et la $15^{ième}$ sont des 2.
- La $16^{ième}$ et la $17^{ième}$ sont des 2.
- De la $18^{ième}$ à la $20^{ième}$, ce sont des 4.
- De la $21^{ième}$ à la $30^{ième}$, ce sont des 5.

Ensuite pour déterminer la médiane :
$1^{ière}$ **étape :** On déterminer l'effectif total :

$$N = \sum x_i = x_0 + x_1 + ... + x_5 = 1 + 12 + ... + 10 = 30$$

$2^{ième}$ **étape :** On détermine le "numéro" de la valeur représentant la médiane.

$$numéro = \frac{N+1}{2} = \frac{30+1}{2} = 15,5^{ième}\ note$$

Attention : N'oubliez surtout pas de faire "$N+1$"
$3^{ième}$ **étape :** Ici l'on obtient un nombre à virgule. On choisit donc la $15^{ième}$ (c'est-à-dire 2) et la $16^{ième}$ (c'est-à-dire 3) en utilisant le tableau des effectifs croissants et on en prend la moyenne :

$$médiane = \frac{2+3}{2} = 2,5$$

La médiane pour la série X est 2,5. On dira que la note médiane pour la seconde A est 2,5. Son interprétation est : "la moitié des notes de la classe sont en dessous de 2,5 et l'autre moitié des notes sont au dessus de 2,5.

3 Quartile.

Définition 2

- Le premier **Quartile** Q_1 est la plus petite valeur de la série tel qu'au moins 25 % des valeurs soit inférieurs ou égales à Q_1.
- Le troisième **Quartile** Q_3 est la plus petite valeur de la série tel qu'au moins 75 % des valeurs soit inférieurs ou égales à Q_3.

Méthode 3

Résultats dans la classe 2A (série X) :

Indice : i	0	1	2	3	4	5
Notes : y_i	0	1	2	3	4	5
Effectifs : n_i	1	12	2	2	3	10
Effectifs cumulés croissants	1	13	15	17	20	30

Pour déterminer le 1^{ier} quartile :
$1^{ière}$ **étape :** On détermine le "numéro" de la valeur représentant le premier quartile (on considère que l'on connait l'effectif total $N = 30$) :

$$numéro = \frac{N}{4} = \frac{30}{4} = 7,5^{ième}\ note$$

$2^{ième}$ **étape :** Ici l'on obtient un nombre à virgule. On choisit donc la $8^{ième}$, pour avoir **plus** de 25 % des valeurs en dessous. On utilise le tableau des effectifs croissants. Le 1^{ier} quartile est donc :

$$Q_1 = 2$$

.

On fait de même pour déterminer le $3^{ième}$ quartile.

Remarque Si nous avions arrondi à 7 au lieu de 8, nous aurions 7 valeurs en dessous de du quartile ce qui aurait constitué moins de 25 % des valeurs

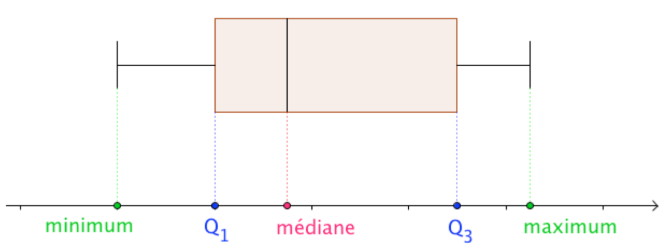
Vidéo 2

Pour déterminer les quartiles.

4 Quartile est diagramme en boite.

Définition 3

Digramme en boîte :

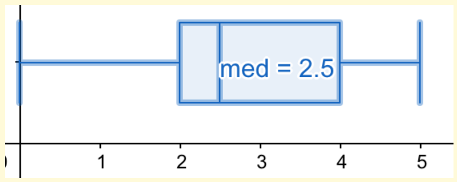


Méthode 4

On considère l'exemple précédent pour la seconde A :
Pour dessiner le diagramme en boîte (ou à moustache), il faut avoir déterminer :

- le minimum : la note 0.
- Le premier quartile : la note $Q_1 = 2$.
- La médiane : $Med = 2,5$.
- Le troisième quartile : la note $Q_3 = 4$.
- Le maximum : la note 5

Ensuite, on le fait apparaitre sous cette forme :



Vidéo 3

Pour dessiner un diagramme en boîte.

B Paramètres de dispersions.

1 L'étendue.

Définition 4

L'étendue est différence entre la plus grande valeur est la plus petite valeur.

2 L'écart inter-quartiles.

Définition 5

L'écart inter-quartiles est différence entre le premier quartile et le troisième quartile.

Exercices 8-14 page 264.

V Paramètres "calculés" à partir des données de la série.

A Paramètres de positions : La moyenne.

1 Définition.

Définition 6

La moyenne d'une série X est la somme des valeurs divisée par l'effectif total :

$$moyenne = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} n_i \times x_i}{N}$$

On note cette moyenne : $\overline{X}$.

Remarque 2. On obtient donc la moyenne est faisant la somme des valeurs divisée par l'effectif total.

Méthode 5

Si l'on reprend l'exemple précédent, on obtient pour la seconde A :

$$\overline{X} = \frac{1 \times 0 + 12 \times 1 + ... + 10 \times 5}{30} = 2,8$$

On dira que la moyenne des la seconde A sur cette petite interrogation est de 2,8.

2 Propriété de linéarité.

Proposition 1

Soit X une série statistique et a et b deux réels donnés :

$$\overline{aX+b} = a\overline{X} + b$$

Démonstration 1.

$$\overline{aX+b} = \frac{1}{N}\left[\sum_{i=1}^{n} n_i \times (ax_i + b)\right] = \frac{1}{N}\left[a\sum_{i=1}^{n} n_i \times x_i + \underbrace{\sum_{i=1}^{n} n_i}_{N} \times b\right] = a\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{n} n_i \times x_i + b = a\overline{X} + b$$

Méthode 6

Dans le cas de l'exemple de la seconde A. On demande à l'enseignant de saisir une note sur 20. On cela, il hésite entre deux options :

- Option 1 : Il multiplie simplement les notes par 4. La moyenne sera alors simplement :

$$\overline{4X} = 4\overline{X} = 4 \times 2,8 = 11,2$$

- Option 2 : Il multiplie par 3 et ajoute à toutes les notes 5 points. La moyenne sera alors :

$$\overline{3X+5} = 3\overline{X} + 5 = 13,4$$

B Paramètres de dispersions : L'écart type.

1 La variance.

L'écart-type exprime la dispersion des valeurs d'une série statistique autour de sa moyenne. Plus il est grand, plus les valeurs sont "éloignées" de la moyenne et donc la "dispersion" est importante.

Définition 7

La variance est la moyenne est écart à la moyenne au carré :

$$V(X) = \overline{\left(X - \overline{X}\right)^2} = \frac{\sum n_i \times (x_i - \overline{X})^2}{N}$$

La variance est la **moyenne** des écarts à la moyenne au carré (c'est à dire : $\left(x_i - \overline{X}\right)^2$)

Proposition 2

Pour calculer la variance l'on peut aussi calculer la moyenne des carrés et lui retrancher la moyenne au carré :

$$V(X) = \overline{X^2} - \overline{X}^2 = \underbrace{\frac{\sum n_i \times x_i^2}{N}}_{moyenne\ des\ carrés} - \underbrace{\overline{X}^2}_{moyenne\ au\ carré}$$

On utilisera plus volontiers la formule précédente.

Démonstration 2.

$$V(X) = \overline{\left(X - \overline{X}\right)^2} = \overline{X^2 - 2\overline{X} \times X + \overline{X}^2} = \overline{X^2} - 2\overline{X} \times \overline{X} + \overline{X}^2 = \overline{X^2} - \overline{X}^2$$

Vidéo 4

Exemple de calcul de variance.

Méthode 7

Si l'on reprend l'exemple précédent (vous compléterez le tableau pour la série Y :

Résultats dans la classe 2A (série X) :

Indice : i	0	1	2	3	4	5
Notes : y_i	0	1	2	3	4	5
Effectifs : n_i	1	12	2	2	3	10
Effectifs cumulés croissants	1	13	15	17	20	30

Pour déterminer la variance de la série X :

$$V(X) = \frac{1 \times 0^2 + 12 \times 1^2 + ... + 10 \times 5^2}{30} - 2,8^2 = 11,2 - 2,8^2 = 3,36$$

Proposition 3

Soit X une série statistique et a et b deux réels donnés :

$$V(aX+b) = a^2V(X)$$

Démonstration 3.

$$\begin{aligned} V(aX+b) &= \overline{(aX+b)^2} - \overline{aX+b}^2 \\ &= \overline{a^2X^2+2abX+b^2} - \left(a\overline{X}+b\right)^2 \\ &= a^2\overline{X^2} + 2ab\overline{X} + b^2 - \left(a^2\overline{X}^2 + 2ab\overline{X} + b^2\right) \\ &= a^2\left(\overline{X^2} - \overline{X}^2\right) \\ &= a^2V(X) \end{aligned}$$

Méthode 8

Dans le cas de l'exemple de la seconde A. Lorsque l'on demande à l'enseignant de saisir une note sur 20. La variance donne pour chaque option :

- Option 1 : Il multiplie simplement les notes par 4. La variance sera alors simplement :

$$V(4X) = 4^2 \times V(X) = 16 \times 3,36 = 58,76$$

- Option 2 : Il multiplie par 3 et ajoute à toutes les notes 5 points. La variance sera alors simplement :

$$V(3X+5) = 3^2 \times V(X) = 9 \times 3,36 = 30,24$$

2 L'écart type.

Pour que le calcul de la dispersion soit homogène à la série étudier (et non au son carré) l'on prendra la racine de la variance.

Définition 8

L'écart type est la racine carré de la variance :

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$$

Méthode 9

Pour déterminer l'écart type, on commencera par déterminer la variance puis l'on calculera sa racine. Si l'on reprend l'exemple précédent l'on obtient :

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{3,36} \simeq 1,83 \text{ à } 10^{-2} \ près.$$

Vidéo 5

Pour déterminer moyenne et écart type d'une série.

Exercices 15-20 page 265.

Proposition 4

Soit X une série statistique et a et b deux réels donnés :

$$\sigma(aX+b) = |a| \times \sigma(X)$$

Méthode 10

En reprenant l'exemple précédent :

- Option 1 : Il multiplie simplement les notes par 4. L'écart type sera alors :

$$\sigma(4X) = 4 \times \sigma(X) \simeq 4 \times 1,83 \simeq 7,32$$

- Option 2 : Il multiplie par 3 et ajoute à toutes les notes 5 points. L'écart type sera alors :

$$\sigma(3X+5) = 3 \times \sigma(X) \simeq 3 \times 1,83 \simeq 5,49$$

VI A la calculatrice.

Voir livre.

VII Exercices

Exercice 1. On donne la série statistique X suivantes :

x_i	0	10	30
n_i	4	a	b

On sait que la moyenne de cette série est 16 et la variance est 204. Déterminer les valeurs de a et b puis donner une valeur approché de son écart type.