Chapitre 4 : Suites numériques.

1 Un peu d'histoire.

La notion de suite est présente dès qu'apparaissent des procédés illimités de calcul. En Égypte vers 1700 av. J.-C déja. Chez Archimède (-287 à -212), spécialiste des procédés illimités d'approximation (séries géométriques de raison 1/4) pour des calculs d'aires et de volumes.
Plus récemment au 1^{ier} siècle apr. J.-C. dans le procédé d'extraction d'une racine carrée par la méthode de Héron d'Alexandrie :

Pour extraire la racine carrée de A, on chosit un nombre arbitraire a et prendre la moyenne entre a et A et recommencer aussi loin que l'on veut le processus précédent.
En notation moderne, cela définit la suite de nombres $u_0 = a$ et $u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{A}{u_n}\right)$.
La conjecture de Syracuse, encore appelée conjecture de Collatz : on part d'un nombre entier plus grand que zéro ; s'il est pair, on le divise par 2 ; s'il est impair, on le multiplie par 3 et on ajoute 1. En dépit de la simplicité de son énoncé, cette conjecture défie depuis de nombreuses années les mathématiciens.

2 Attendus

- Savoir modéliser une situation donnée par une suite. *2 page 115 ; 2 page 117*
- Savoir représenter graphiquement les termes d'une suite. *1 page 113*
- Savoir utiliser la premier bissectrice et la représentation de la fonction f pour obtenir les termes d'une suite récurrente définie par $u_{n+1} = f(u_n)$. *2 page 113*
- Savoir déterminer les variations d'une suite par :
  - — Par l'étude du signe de $u_{n+1} - u_n$. *1 page 137*
  - — Par l'étude du rapport $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ si la suite (u_n) est à termes positifs. *3 page 137*
  - — Par l'étude de la fonction f si $u_n = f(n)$. *2 page 137*
- Conjecturer la limite d'une suite. *1-2 page 139*
- Programmer une suite récurrente sur sa machine.
- Écrire un algorithme permettant d'obtenir les termes d'une suite.
- Trouver l'expression permettant d'exprimer u_n en fonction de n et savoir l'appliquer pour trouver n'importe quel terme de la suite pour une suite arithmétique et géométrique.
- Déterminer la raison et le premier terme d'une suite arithmétique ou géométrique à partir de deux termes de la suite. *(*
- Savoir reconnaître une suite arithmétique ou géométrique. *1 page 115 et 1 page 117*
- Savoir déterminer la somme de termes d'une suite arithmétique ou géométrique. *3 page 115 et 3 page 117*
- Savoir déterminer la limite d'une suite arithmétique à partir de sa raison.
- Savoir déterminer la limite d'une suite géométrique à partir de son premier terme et de sa raison.
- Savoir déterminer la limite de la somme des termes d'une suite géométrique.
- Lorsque $0 < q < 1$, savoir déterminer à partir de quel rang q^n est inférieur à un nombre $a > 0$ donné.
- Exercices de synthèse.
- Exercices d'approfondissement.

3 Généralité sur les suites.

Définition 1

Une **suite** u est une **fonction** de définie de $\mathbb{N}$ (parfois $\mathbb{N}^*$) dans $\mathbb{R}$. La notation utilisé pour $u(n)$ est plus communément u_n (lu "u indice n"). On parlera alors de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou plus simplement de (u_n).

Exemple 1.

La fonction :

$$\begin{aligned} u : \mathbb{N} &\to \mathbb{R} \\ n &\mapsto n^2+1 \end{aligned}.$$

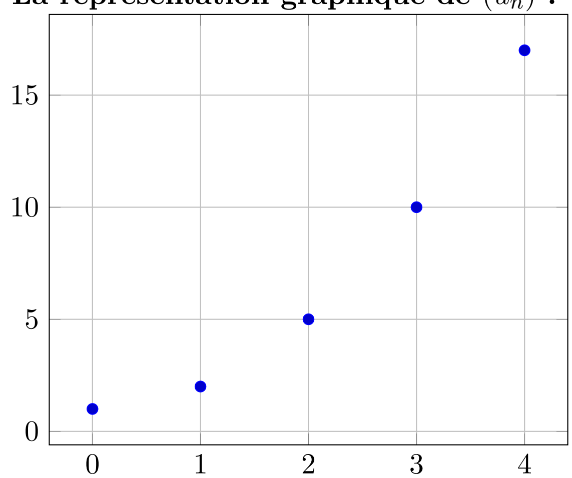
Donc on peut calculer les images, appelés termes de la suite :

$$u(0) = u_0 = 0^2+1 = 1 \quad ; \quad u(2) = u_2 = 2^2+1 = 5 \quad ; \quad u(10) = u_{10} = 10^2+1 = 101$$

Ou encore :

$$u(n+1) = u_{n+1} = (n+1)^2+1 = n^2+2n+2 \quad ; \quad u(n-3) = u_{n-3} = (n-3)^2+1 = n^2-6n+10 \quad (n \geqslant 3)$$

La représentation graphique de (u_n) :



Remarque 1. Pour l'exemple précédent, on parlera de la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = n^2+1$.

Ex 11 à 18 page 120

Définition 2

On appelle suite récurrente, une suite dont le terme suivant est obtenue à partir d'un ou plusieurs terme(s) précédent(s).

Exemple 2. Un pays compte 300 loups en 2017. On estime que la population des loups croit naturellement au rythme de 12 % par an. Pour réguler la population des loups, le gouvernement autorise les chasseurs à tuer un quota de 18 loups par an.

On modélise la population par une suite (u_n), le terme u_n représentant le nombre de loups de ce pays en $2017+n$.

On a alors, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 1,12u_n - 18$.

Nous pouvons obtenir les termes 10 premiers termes de cette suite à partir de l'algorithme :

```
N ← 0
U ← 300
Tant que N < 10 faire
    U ← 1,12 × U − 18
    N ← N + 1
    Afficher U arrondi à l'entier
Fin Tant que
```

On obtient alors : 318 338 360 386 414 446 481 521 565 615

Ex 20-26 page 120-121

3.1 Variation d'une suite.

Définition 3

Soit une suite (u_n). On dira de la suite (u_n) quelle est :

- **croissante** si pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_{n+1} \geqslant u_n$.
- **décroissante** si pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_{n+1} \leqslant u_n$.

Méthode 1

Pour étudier les variations d'une suite (u_n), nous pouvons étudier le signe de $u_{n+1} - u_n$. Si pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a :

- $u_{n+1} - u_n \geqslant 0$ alors (u_n) est croissante.
- $u_{n+1} - u_n \leqslant 0$ alors (u_n) est décroissante.

Exemple 3. Si l'on considère la suite récurrente (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n^2 - u_n + 1 \quad et \quad u_0 = 1$$

Alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n = u_n^2 - 2u_n + 1 = (u_n - 1)^2 \geqslant 0$$

Donc la suite (u_n) est donc croissante.

14-15 page 142.

Méthode 2

Pour étudier les variations d'une suite strictement positive (u_n), nous pouvons étudier le rapport $\frac{u_{n+1}}{u_n}$. Si pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a :

- $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geqslant 1$ alors (u_n) est croissante.
- $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant 1$ alors (u_n) est décroissante.

Exemple 4. Si l'on considère la suite récurrente (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{u_n}{u_n^2 + 1} \quad et \quad u_0 = 1$$

Alors :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{u_n^2 + 1} \leqslant 1 \quad puisque \quad u_n^2 + 1 \geqslant 1$$

Donc la suite (u_n) est donc décroissante.

19-20 page 142.

Méthode 3

Si la suite est définie en fonction de n, c'est-à-dire $u_n = f(n)$, et que la fonction f est définie sur $\mathbb{R}^+$ alors on étudie les variations de la fonction f et on en déduit les variations de la suite (u_n).

Exemple 5. On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = \dfrac{-6}{\sqrt{n^2+4}} + 5$. On considère la fonction $f(x) = \dfrac{-6}{\sqrt{x^2+4}} + 5$ définie sur $\mathbb{R}^+$.

On étudie les variations de f sur $\mathbb{R}^+$:

x	0	$+\infty$
$x \mapsto x^2$	0 ↗	$+\infty$
$x \mapsto x+4$	4 ↗	$+\infty$
$x \mapsto \sqrt{x}$	2 ↗	$+\infty$
$x \mapsto \frac{1}{x}$	$\frac{1}{2}$ ↘	0
$x \mapsto -6x+5$	2 ↗	5

Justification :

.

Car la fonction carré est croissante sur $[0; +\infty[$

.

.

L'opération $u + k$ ne modifie pas les variations de la fonction.

.

.

La fonction $\sqrt{u}$ à les mêmes variation que u.

.

La fonction inverse, inverse les variations de u (Remarque : ici on est à valeur dans $[2; +\infty[$ intervalle sur lequel la fonction inverse est bien définie)

.

La fonction affine $x \mapsto -6x + 5$ est décroissante donc les variations sont inversées.

Exercice relatif aux variations **11 à 25 page 142.**

3.2 Limite de suite.

Méthode 4

Méthode empirique

Á l'aide d'un tableur ou de la calculatrice on détermine à partir des valeurs des termes de la suites ou de la représentation graphique, on fait une conjecture de la limite de la suite quand n tend vers $+\infty$.

Exemple 6. Si l'on reprend l'exemple précédent : la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = \dfrac{-6}{\sqrt{n^2+4}} + 5$. Le calcul des premiers termes permet d'observer :

n	0	1	10	100	1000	10000
u_n	2	2,31	4,41	4,94	4,99	4,9994

On observe que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 5$. On remarque aussi que la suite est croissante.

Exemple 7. Si l'on considère la suite récurrente (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $v_{n+1} = 0,9 \times v_n + 1$ et $v_0 = 0$. Le calcul des premiers termes permet d'observer :

n	0	1	2	10	50	100
v_n	0	1	1,9	6,51	9,95	9,9997

On observe que $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 10$. On remarque aussi que la suite est croissante.

Exemple 8. .

- Si $w_n = n^2 + 3n + 1$, on remarque $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = +\infty$.
- $t_n = (-1)^n \times n$, on remarque $\lim\limits_{n\to+\infty} t_n$ n'existe pas.

Ex 26 à 30 page 143

4 Suites arithmétiques

Exercice 1. Louis perçois 50 € d'argent de poche tous les mois depuis le premier janvier 2010. On note u_n la totalité de son argent poche cumulé (il a décidé de ne pas le dépenser).

1. Déterminer u_0 puis u_1 puis u_2, dites ce que représentent ces sommes.
2. Déterminer u_{n+1} en fonction de u_n.
3. Conjecturer l'expression de u_n en fonction de n.
4. Déterminer les variations de la suite (u_n).
5. Que pensez-vous de la limite de la suite (u_n).

4.1 Généralités.

Exemple 9. Bruno dispose de 100 € dans sa tirelire, donné par sa grand-mère. Bruno reçoit chaque mois 45 € de ses parents qu'il met systématiquement dans sa tirelire. On note u_n la somme dans sa tirelire au $n^{\text{ième}}$ mois. On obtient la formule de récurrence :

$$u_{n+1} = u_n + \underbrace{45}_{\textit{Somme déposée chaque mois}}$$

On dira que (u_n) est une **suite arithmétique** de **raison** 45 et de **premier terme** $u_0 = 100$.

Définition 4

Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est **arithmétique** de raison r signifie que :

$$\forall n \in \mathbb{N} : u_{n+1} = u_n + r$$

Remarque 2. Cette définition reste valable même si le premier terme de la suite n'est pas u_0. Il arrive souvent que le premier terme de la suite soit u_1.

Proposition 1

Si la suite (u_n) est arithmétique de raison r, alors

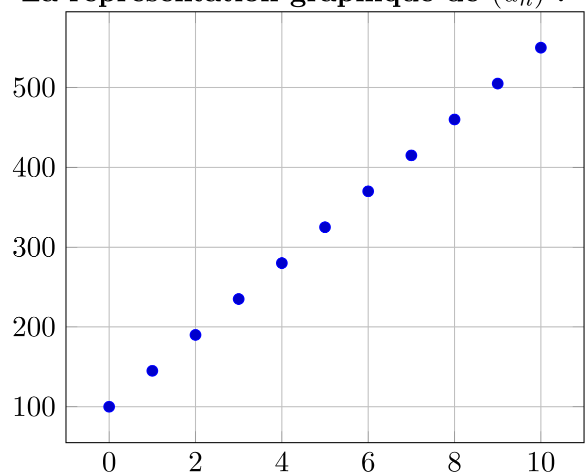
$$\forall (n,p) \in \mathbb{N}^2 : u_n = rn + u_0 = (n-p)r + u_p$$

Démonstration 1. Idée de démonstration : On remarque que si $u_n = (n-p)r + u_p$ alors $u_{n+1} = u_n + r = rn + u_0 = (n-p)r + u_p + r = (n+1-p)r + u_p$. On dira que par "effet de domino" la propriété devient vrai à tous les termes $n \geqslant p$. De même dans pour $p \geqslant n$ mais avec $u_{n-1} = u_n - r$.

Remarque 3. On reconnait l'expression d'une fonction affine et la représentation graphique sera constituée de points alignés.

Exemple 10. Si l'on reprend l'exemple précédent, on a $u_{n+1} = u_n + 45$.
L'expression de u_n en fonction de n est donc $u_n = 45n + 100$.

La représentation graphique de (u_n) :



Vidéo 1

Déterminer la raison et le premier terme d'une suite arithmétique :
`https://youtu.be/YCokWYcBBOk`

Ex 33 à 37 page 121

Proposition 2

Toute suite dont le terme générale peut s'écrire sous la forme $u_n = an + b$ est une suite arithmétique de raison a.

Démonstration 2. Si $u_n = an + b$ alors $u_{n+1} = a(n+1) + b = an + b + a = u_n + a$. D'où le résultat.

Vidéo 2

Reconnaitre une suite arithmétique : `https://youtu.be/6O0KhPMHvBA`
Déterminer la raison et le premier terme d'une suite arithmétique : `https://youtu.be/iEuoMgBblz4`

Ex 29-30 ; 38 à 42 page 121

4.2 Somme des termes d'une suite arithmétique.

Proposition 3

Somme des n premier entier :

$$\sum_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + ... + n = \frac{1+n}{2} \times n$$

Démonstration 3. Deux cas :

- Si $n = 2p$ est pair :
$1 + 2 + ... + n = 1 + 2 + 3 + ... + p + (p+1) + ... + 2p = \underbrace{(1+2p) + (2 + (2p-1) + ...(p + (p+1))}_{p \text{ termes égaux à } 2p+1=n+1}$
. $= p \times (n+1) = \dfrac{n}{2} \times (n+1)$
- Si $n = 2p+1$ est impair :
$1+2+...+n = 1+2+3+...+p+(p+1)+...+2p+(2p+1) = \underbrace{(1+2p) + (2 + (2p-1) + ...(p + (p+1))}_{p \text{ termes égaux à } 2p+1=n} + n$
. $= p \times n + n = (p+1) \times n = \dfrac{1+n}{2} \times n$

Exemple 11. Calcul de :

$$\sum_{k=1}^{100} k = 1 + 2 + ... + 100 = \frac{1+100}{2} \times 100 = 5050$$

Exemple 12. Si (u_n) est la suite arithmétique de premier terme $u_0 = 3$ et de raison 2.
Calcul de :

$$\sum_{k=0}^{10} u_k = \underbrace{3}_{u_0} + \underbrace{3+2}_{u_1} + \underbrace{3+2\times 2}_{u_2} + ... + \underbrace{3+2\times 10}_{u_{10}} = 3 \times 11 + 2 \times \frac{1+10}{2} \times 10 = 143$$

Calcul de :

$$\sum_{k=3}^{10} u_k = 9 + 11 + 13 + ... + 23 = 9 \times \underbrace{8}_{nb \text{ de } "3"} + 2 \times \frac{1+7}{2} \times 7 = 128$$

Vidéo 3

Somme des termes d'une suite arithmétique :
`https://youtu.be/WeDtB9ZUTHs` et `https://youtu.be/iSfevWwk8e4`

41 page 122

4.3 Variation et limite d'une suite arithmétique.

Proposition 4

On considère ici (u_n) comme une suite arithmétique.

- Si $r > 0$ la suite (u_n) est croissante et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.
- Si $r < 0$ la suite (u_n) est décroissanteet $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

Vidéo 4

Comment étudier les variation d'une suite géométrique :
`https://youtu.be/R3sHNwOb02M`

5 Suites géométriques

5.1 Généralités.

Exemple 13. On place une somme de 100 € sur un livret A rémunéré à 0,75 % par an. On note u_n la somme sur le compte à la $n^{ième}$ année. On obtient la somme de récurrence $u_{n+1} = \underbrace{1,0075}_{\textit{pour augmenter de } 0{,}75\%} \times u_n$.

On dira que (u_n) est une **suite géométrique** de **raison** 1,0075 et de **premier terme** $u_0 = 100$.

Définition 5

Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique de raison q signifie que :

$$\forall n \in \mathbb{N} : u_{n+1} = q \times u_n$$

Remarque 4. Cette définition reste valable même si le premier terme de la suite n'est pas u_0. Il arrive souvent que le premier terme de la suite soit u_1.

Proposition 5

Si la suite (u_n) est géométrqiue de raison q, alors

$$\forall (n,p) \in \mathbb{N}^2 : u_{n+1} = q^{n-p} \times u_0 = q^n \times u_p$$

Exemple 14. Si l'on reprend l'exemple précédent, on a $u_{n+1} = \underbrace{1,0075}_{\textit{pour augmenter de } 0{,}75\%} \times u_n$.

L'expression de u_n en fonction de n est donc $u_n = 1,0075^n \times u_0 = 1,0075^n \times 100$.

Vidéo 5

Déterminer la raison et le premier terme d'une suite géométrique :
`https://youtu.be/wUfleWpRr10`

Ex 49 à 52 page 122

Proposition 6

Une suite dont le terme générale s'écrire sous la forme aq^n est une suite géométrique de raison q.

Vidéo 6

Reconnaitre une suite géométrique :
`https://youtu.be/WTmdtbQpa0c` et `https://youtu.be/YPbEHxuMaeQ`

45-46 page 122

5.2 Somme des termes d'une suite géométrique.

Proposition 7

Pour q un réel différent de 1 et un entier n, on a :

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = 1 + q + ... + q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q} = \frac{q^{n+1}-1}{q-1}$$

Exemple 15. Calcul de :

$$\sum_{k=0}^{10} \left(\frac{1}{2}\right)^k = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + ... + \left(\frac{1}{2}\right)^{10}) = \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{11}}{1-\frac{1}{2}} = 2\left(1 - \frac{1}{2^{11}}\right)$$

%endcenter

Exemple 16. Si (u_n) est la suite géométrique de premier terme $u_0 = 3$ et de raison 2.
Calcul de :

$$\sum_{k=0}^{10} u_k = 3\times 2^0 + 3\times 2^1 + 3\times 2^2 + ... + 3\times 2^{10} = 3\times(1+2+2^2+...+2^{10} = 3\frac{1-2^{11}}{1-2} = 3\left(2^{11}-1\right)$$

Calcul de :

$$\sum_{k=3}^{10} u_k = 24 + 48 + 96 + ... + 3\times 2^{10} = 24\frac{1-2^8}{1-2} = 24\left(2^7-1\right)$$

Vidéo 7

Somme des termes d'une suite géométrique :
`https://youtu.be/rIaYMXPbWE8`

Ex 53 page 122

5.3 Limite d'une suite géométrique.

Proposition 8

Soit q un réel **strictement positif**. On observe les deux cas suivants :

- Si $0 < q < 1$ alors $\lim_{n\to+\infty} q^n = 0$.
- Si $q = 1$ alors $\lim_{n\to+\infty} q^n = q$.
- Si $1 < q$ alors $\lim_{n\to+\infty} q^n = 0$.

Proposition 9

On considère ici u_n comme une suite géométrique.

	1^{ier} terme > 0	1^{ier} terme < 0
Si $0 < q < 1$	$u_n \longrightarrow 0$	$u_n \longrightarrow 0$
Si $1 = q$	u_n constante	u_n constante
Si $1 < q$	$u_n \longrightarrow +\infty$	$u_n \longrightarrow -\infty$

Vidéo 8

Étude de la limite d'une suite géométrique :
`https://youtu.be/F-PGmIK5Ypg` et `https://youtu.be/2BueBAoPvvc`

5.4 Variation d'une suite géométrique.

Proposition 10

On considère ici u_n comme une suite géométrique.

	1^{ier} terme > 0	1^{ier} terme < 0
Si $0 < q < 1$	$u_n \searrow 0$	$u_n \nearrow 0$
Si $1 = q$	u_n constante	u_n constante
Si $1 < q$	$u_n \nearrow +\infty$	$u_n \searrow -\infty$

Vidéo 9

Comment étudier les variation d'une suite géométrique :
`https://youtu.be/vLshnJqW-64`

5.5 "Rapidité" de la convergence vers 0

Lorsque $0 < q < 1$ et que le premier terme est positif, on peut déterminer le rang à partir du quel les termes de la suite sont plus petit qu'un réel $A > 0$ donné. Voici un algorithme qui fonctionne :
$1^{iére}$ étape affectation et saisie :

- choisir A
- n=0
- Entrer $u = 1^{ier} terme$ et $q = raison$

$2ième$ étape : boucle "tant que"

- Tant que $u_n \geqslant A$ faire
  - $n \longleftarrow n + 1$
  - $u \longleftarrow u \times q$

$3^{ième}$ étape : afficher n.

6 Suite récurrente.

Définition 6

On appelle suite récurrente, une suite dont le terme suivant est obtenue à partir d'un ou plusieurs terme(s) précédent(s).

Exemple 17. La suite récurrente (u_n) définie par $u_{n+1} = 0,6u_n + 0,1$ et $u_0 = 2$, est une suite récurrente de la forme $u_{n+1} = f(u_n)$ avec $f(x) = 0,6x + 0,1$ fonction affine. (Dans ce cas l'on par de suite arithmético-géométrique qui n'est ni géométrique ni arithmétique comme son nom ne l'indique pas !)

6.1 Représentation.

En traçant la première bissectrice (d'équation réduite $y = x$), on obtient :

La représentation graphique de (u_n) :