Module : Suites et séries de fonctions.

Notation *: On notera que $\mathbb{K}$ est $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soit $X \subset \mathbb{K}$ un ensemble non vide. On note $\mathscr{F}(X, \mathbb{K})$ l'ensemble des fonctions* ***définies*** *sur X à valeurs dans $\mathbb{K}$.*

I Rappels

Définition 1

On appelle suite réelle une application U, définie sur $\mathbb{N}$ à valeurs dans $\mathbb{K}$
Plutôt que $U : \mathbb{N} \to \mathbb{K}$ l'on note $U = (U_n)_n = (U_n)$
Plutôt que $\mathbb{N}$ l'ensemble de départ peut être $[\![n_0, +\infty[\![$ avec $n_0 \in \mathbb{N}$.

Définition 2

Soit (U_n) une suite de $\mathbb{K}$. Soit $\ell \in \mathbb{K}$, on dit que (U_n) converge vers ℓ si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0, \forall n \geqslant n_0, |U_n - \ell| \leqslant \varepsilon$$

On note alors $\lim_{n \to +\infty} U_n = \ell$.

II Suites de fonctions

A Définition

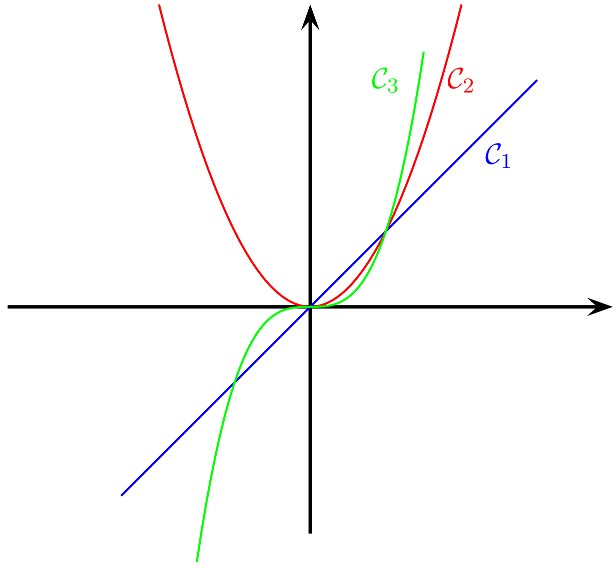
Définition 3

On appelle suite de fonctions une application définie sur $\mathbb{N}$ à valeurs dans $\mathscr{F}(X, \mathbb{K})$.

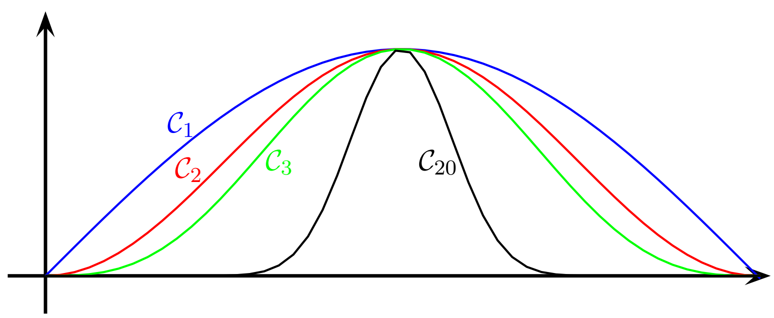
$$u : \mathbb{N} \to \mathscr{F}(X, \mathbb{K})$$

Comme pour les suites numériques, on privilégiera la notation u_n plutôt que $u(n)$ qui ici désignera une fonction.

Exemple 1. La suite de fonctions (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par $u_n \; : \; \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^n \end{array}$



Exemple 2. La suite de fonctions (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par $\begin{array}{cccc} u_n & : & [0,\pi] & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & \sin(x)^n \end{array}$



Lien vers l'animation.

Exemple 3. La suite de fonctions (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par $\begin{array}{ccccc} u_n & : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & \left(x^2 + \dfrac{1}{n^2}\right)^{\frac{1}{2}} \end{array}$

Lien vers l'animation.

Exemple 4. La suite de fonctions (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par $\begin{array}{ccccc} u_n & : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ nx & \text{si } x \in \left[0, \dfrac{1}{n}\right] \\ 1 & \text{si } x \geqslant \dfrac{1}{n} \end{cases} \end{array}$

Lien vers l'animation.

Exemple 5. La suite de fonctions (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $\begin{array}{ccccc} u_n & : & [0,1] & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & n^2x^n(1-x) \end{array}$

Lien vers l'animation.

Exemple 6. La suite de fonctions (S_N) définie pour tout $N \in \mathbb{N}^*$ par $\begin{array}{ccccc} u_N & : & \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ & & z & \mapsto & \displaystyle\sum_{n=0}^{N} \frac{z^n}{n!} \end{array}$

***Remarque* 1.** *Si (u_n) est une suite de fonctions de $\mathscr{F}(X,\mathbb{K})$ alors l'ensemble de définition de toutes ces fonctions est X.*

Remarque 2. *Si $x \in X$, pour tout n, $u_n(x) \in \mathbb{K}$. Donc $(u_n(x))$ est une suite à valeurs dans $\mathbb{K}$.*

Exemple 7. Si l'on reprend la suite de fonctions (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par $u_n : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^n \end{array}$, alors la suite réelle $(u_(2))$ est la suite géométrique de premier terme 1 et raison 2 (elle tend vers $+\infty$ et la suite réelle $(u_n(1/2))$ est la suite géométrique de premier terme 1 et raison $\dfrac{1}{2}$ (elle tend vers 0

Exemple 8. Si l'on reprend la suite de fonctions (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par :

$$u_n : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ nx & \text{si } x \in \left[0, \dfrac{1}{n}\right] \\ 1 & \text{si } x \geqslant \dfrac{1}{n} \end{cases} \end{array}$$

Si l'on choisit $x > 0$ alors la suite $(u_n(x)$ est stationnaire et vaut 1 à partir d'un certain rang.

B Les différents types de convergence.

Problématique **1.** Les différents types de convergence et lors lien entre elles.

1 Convergence simple.

Définition 4 (Convergence simple)

Soit (u_n) une suite de fonctions de $\mathscr{F}(X, \mathbb{K})$ et u une fonction de $\mathscr{F}(X, \mathbb{K})$. On dit que (u_n) converge simplement vers u sur X si :

$$\forall x \in X, \forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant n_0, |u_n(x) - u(x)| \leqslant \varepsilon$$

Autrement dit :

$$\forall x \in X, \lim_{n \to +\infty} u_n(x) = u(x)$$

Méthode 1 (Étude de la convergence simple)

Pour étudier la convergence simple, il faut *"fixer"* x dans X puis étudier la suite numérique $(u_n(x))$ avec les méthodes connues.
Si l'on reprend la suite de fonctions précédente (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par

$$u_n : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \left(x^2 + \dfrac{1}{n^2}\right)^{\frac{1}{2}} \end{array}$$

Soit $x \in \mathbb{R}$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n(x) = \lim\limits_{n \to +\infty} \sqrt{x^2 + \dfrac{1}{n^2}} = \sqrt{x^2} = |x|$.
Donc la suite (u_n) tend simplement vers la fonction valeur absolue.
Lien vers l'animation.

Exemple 9. Si l'on reprend la suite de fonctions précédente (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par

$$u_n : \begin{array}{ccc} [0,1] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & n^2 x^n (1-x) \end{array}$$

Soit $x \in [0,1]$.

1^{ier} **cas $x \in]0,1[$:** On a :

$$\lim_{n\to+\infty} n^2x^n = 0 \quad \text{Par croissance comparée}$$

Donc $\lim_{n\to+\infty} u_n(x) = 0$.

$2^{iéme}$ **cas $x \in \{0,1\}$**. Alors $u_n(x) = 0$ donc $\lim_{n\to+\infty} u_n(x) = 0$.

Donc la suite de fonctions (u_n) tend vers la fonction nulle.

Lien vers l'animation.

Exemple 10.

```python
from numpy import *

def fn(x,n):
    return (sin(x))**n

def Suite_pour_x(fn,N,x):
    Liste_valeurs=[fn(x,i) for i in range(N)]
    return Liste_valeurs

print(Suite_pour_x(fn,10,pi/2))
```

Listing 1 – Exemple d'implémentation permettant l'évaluation d'une suite de fonction en un point.

2 Convergence uniforme.

Définition 5 (Convergence uniforme)

Soit (u_n) une suite de fonctions de $\mathscr{F}(X,\mathbb{K})$ et u une fonction de $\mathscr{F}(X,\mathbb{K})$. On dit que (u_n) converge uniformément vers sur X si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant n_0,\ \forall x \in X, \quad |u_n(x) - u(x)| < \varepsilon$$

Remarque 3. Si l'on compare les deux définitions :

$$\text{CS : } \forall x \in X, \forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant n_0, \quad |u_n(x) - u(x)| \leqslant \varepsilon$$

$$\text{CU : } \forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \geqslant n_0,\ \forall x \in X, \quad |u_n(x) - u(x)| < \varepsilon$$

On voit que pour la convergence simple le n_0 dépend de ε tandis que ce n'est pas le cas pour la convergence uniforme. D'où la proposition 1 à venir.

Définition 6

Soit f une fonction de $\mathscr{F}(X,\mathbb{K})$. On notera :

$$\sup_{x\in X}(|f(x)|) = \|f\|_{\infty,X}$$

Si f n'est pas bornée ce sup vaut $+\infty$.

Remarque 4. Si (u_n) est sur suite de fonctions de $\mathscr{F}(X,\mathbb{K})$, u une fonction de $\mathscr{F}(X,\mathbb{K})$, $n \in \mathbb{N}$ et $\varepsilon \in \mathbb{R}$, alors :

$$\forall x \in X,\ |u_n(x) - u(x)| \leqslant \varepsilon \Leftrightarrow \|u_n - u\|_{\infty,X} \leqslant \varepsilon$$

D'où la proposition ci-dessous :

Proposition 1

Soit (u_n) une suite de fonctions de $\mathscr{F}(X,\mathbb{K})$ et u une fonction de $\mathscr{F}(X,\mathbb{K})$.

$$(u_n)\ \textbf{converge uniformément}\ \text{ vers } u \Leftrightarrow \left(\lim_{n\to+\infty}\|u_n-u\|_{\infty,X}=0\right)$$

Démonstration. Soit (u_n) une suite de fonctions de $\mathscr{F}(X,\mathbb{K})$ et u une fonction de $\mathscr{F}(X,\mathbb{K})$.

$$\begin{aligned}(u_n)\ \textbf{converge uniformément}\ \text{ vers} u &\Leftrightarrow \forall\varepsilon>0,\exists n_0\in\mathbb{N},\forall n\geqslant n_0,\forall x\in X,|u_n(x)-u(x)|\leqslant\varepsilon\\ &\Leftrightarrow \forall\varepsilon>0,\exists n_0\in\mathbb{N},\forall n\geqslant n_0,\|u_n-u\|_{\infty,X}\leqslant\varepsilon\\ &\Leftrightarrow \lim_{n\to+\infty}\|u_n-u\|_{\infty,X}=0\end{aligned}$$

□

Proposition 2

La convergence uniforme d'une suite de fonction (vers une fonction u) entraine la convergence simple (vers cette fonction u)

Démonstration. Soit (u_n) une suite de fonctions de $\mathscr{F}(X,\mathbb{K})$ convergence uniformément vers u une fonction de $\mathscr{F}(X,\mathbb{K})$. Alors :

$$\forall x\in X,|u_n(x)-u(x)|\leqslant\|u_n-u\|_{\infty,X}$$

Comme $\lim\limits_{n\to+\infty}\|u_n-u\|_{\infty,X}=0$, on a :

$$\forall x\in X,\lim_{n\to+\infty}|u_n(x)-u(x)|=0$$

Donc $\forall x\in X,\lim\limits_{n\to+\infty}u_n(x)=u(x)$

□

Remarque 5*.* La convergence simple est justement bien plus simple à montrer. Donc pour montrer qu'une convergence est uniforme, nous commencerons par déterminer vers qu'elle fonction cette suite converge simplement puis ensuite seulement nous montrerons que cette converge est uniforme afin de connaitre la fonction de convergence.

Méthode 2 (Montrer que la convergence uniforme)

Pour montrer la convergence est uniforme l'on va majorée la norme $\|u_n - u\|_{\infty,X}$.
Si l'on reprend la suite de fonctions précédente (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par

$$\begin{array}{rccc} u_n & : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & \left(x^2 + \dfrac{1}{n^2}\right)^{\frac{1}{2}} \end{array}$$

Si l'on note $|.|$ la fonction valeur absolue définie sur $\mathbb{R}$ vers laquelle nous avons montré que la suite de fonction converge simplement.
Trouvons algébriquement un majorant de $\|u_n - |.|\|_{\infty,\mathbb{R}}$
Soit $x \in \mathbb{R}$, alors :

$$\Big|u_n(x) - |x|\Big| = \left|\sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}} - |x|\right| = \left|\frac{x^2 + \dfrac{1}{n^2} - x^2}{\sqrt{x^2 + \dfrac{1}{n^2}} + |x|}\right| = \frac{1}{n^2\left[\sqrt{x^2 + \dfrac{1}{n^2}} + |x|\right]} \leqslant \frac{1}{n^2} \times n = \frac{1}{n}$$

$$\text{Car : } \sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}} + |x| \geqslant \frac{1}{n} \to \frac{1}{\left[\sqrt{x^2 + \dfrac{1}{n^2}} + |x|\right]} \leqslant n$$

Donc : $\|u_n - |.|\|_{\infty,\mathbb{R}} \leqslant \dfrac{1}{n}$.
Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \|u_n - |.|\|_{\infty,\mathbb{R}} = 0$. La suite (u_n) converge donc uniformément vers la fonction valeur absolue.

$$\text{Car : } \sqrt{x^2 + \frac{1}{n^2}} + |x| \geqslant \frac{1}{n}$$

Lien vers l'animation.

Méthode 3 (Montrer qu'une convergence est uniforme)

Pour montrer qu'une suite de fonction (u_n) converge uniformément vers une fonction u, puis que nous devons montrer déterminer un sup et est souvent judicieux de faire l'étude de la fonction $u_n - u$ afin de déterminer ses extréma et ainsi de majorer $v_n = \|u_n - u\|_{\infty,X}$. Voir exercices .....

Exemple 11. Prévoir un exemple.

Exemple 12.

```
from numpy import *
import matplotlib.pyplot as plt

def fn(x,n):
    return (sin(x))**n

def Nuage_points(fn,rang,decoupe,a,b):
    Abscisses=[a+i*(b-a)/decoupe for i in range(decoupe)]
    Liste_valeurs=[fn(a+i*(b-a)/decoupe,rang) for i in range(decoupe)]
    return Abscisses,Liste_valeurs

print(Nuage_points(fn,4,10,0,pi))

plt.plot(Nuage_points(fn,4,10,0,pi))

plt.show()
```

Listing 2 – Exemple d'implémentation permettant d'obetenir la représentation graphique des un

3 Critère de Cauchy-Uniforme

Je ne suis pas sûr que cette partie soit judicieuse en INP, mais elle rend plus simple la démonstration de la dérivabilité de la limite d'une suite de fonctions dérivables

Définition 7 (Critère de Cauchy)

Soit (un) une suite de fonctions de $\mathscr{F}(X, \mathbb{K})$. On dit qu'elle vérifie le **critère de Cauchy uniforme** si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall p, q \geqslant N, \forall x \in X, \qquad |u_p(x) - u_q(x)| < \varepsilon$$

Ou ce qui est équivalent :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \forall p, q \geqslant N, \qquad \|u_p(x) - u_q(x)\|_{\infty, X} < \varepsilon$$

Proposition 3

Soit (u_n) une suite de fonctions de $\mathscr{F}(X, \mathbb{K})$. Le critère de Cauchy uniforme et équivalent à la converge uniformément. Il existe donc dès lors une fonction u de $\mathscr{F}(X, \mathbb{K})$ vers laquelle la suite des (u_n) converge uniformément.

Démonstration. Montrons $\Leftarrow$ (C'est-à-dire que la convergence uniforme implique la convergence de Cauchy Uniforme)

Soit (u_n) une suite de fonctions de $\mathscr{F}(X, \mathbb{K})$ convergeant uniformément vers une fonction u de $\mathscr{F}(X, \mathbb{K})$.

Soit $\varepsilon > 0$, alors :

$$\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant N, \forall x \in X, \qquad |u_n(x) - u(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

Soit donc $p, q \geqslant N$ alors :

$$\forall x \in X,\ |u_p(x) - u_q(x)| \leqslant |u_p(x) - u(x)| + |u(x) - u_q(x)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

Donc le critère de Cauchy est vérifié.

Montrons $\Rightarrow$ (C'est-à-dire que la convergence de Cauchy Uniforme implique la convergence uniforme)

Soit (u_n) une suite de fonctions de $\mathscr{F}(X, \mathbb{K})$ vérifiant le critère de Cauchy Uniforme.

Soit $\varepsilon > 0$, alors :

$$\exists N \in \mathbb{N}, \forall p, q \geqslant N, \forall x \in X, \qquad |u_p(x) - u_q(x)| < \varepsilon$$

Donc si $x \in X$ alors la suite $(u_n(x))$ est une suite de Cauchy, or $\mathbb{K}$ (qui est R ou $\mathbb{C}$ attention avec $\mathbb{Q}$ ça ne marche pas !!) est complet. Donc cette suite converge et l'on note cette limite $u(x)$ (est ainsi on définie une fonction de $\mathscr{F}(X, \mathbb{K})$) Par passage à la limite lorsque p tend vers $+\infty$ dans l'expression précédente l'on obtient :

$$|u_p(x) - u_q(x)| < \varepsilon \Rightarrow |u(x) - u_q(x)| < \varepsilon$$

Donc :

$$\exists N \in \mathbb{N}, \forall q \geqslant N, \forall x \in X, \qquad |u(x) - u_q(x)| < \varepsilon$$

Donc (u_n) converge uniformément vers u sur X. □

Exemple 13. Voir exercice ou prévoir exemple(s)

4 Convergence locale uniforme.

Notation : Soit $a \in \mathbb{K}$ et $r > 0$, on notera $B(a, r) = \{x \in \mathbb{K}, |x - a| \leqslant r\}$ voisinage de a.

Définition 8

Soit (u_n) une suite de fonctions de $\mathscr{F}(X, \mathbb{K})$, soit u une fonction de $\mathscr{F}(X, \mathbb{K})$.
On dit que la suite de fonction (u_n) converge localement uniformément sur X vers u si :

$$\forall x \in X, \exists \eta > 0, \text{ tel que } (u_n) \text{ converge uniformément sur } B(x, \eta)$$

Proposition 4

Pour une suite de fonction de $\mathscr{F}(X, \mathbb{K})$ la convergence locale uniforme est équivalente à la convergence uniforme sur tout compact de X.

Démonstration. Admis □

C Convergence uniforme et continuité

***Problématique* 2.** Pour une suite (u_n) de fonction continue, suivant la nature de la convergence éventuelle de la suite de (u_n) vers une fonction u, que peut-on dire de la continuité de u.

Proposition 5

Soit (u_n) une suite de fonctions de $\mathscr{F}(X, \mathbb{K})$ **continues** en $x_0 \in X$, **convergeant uniformément** vers une fonction u de $\mathscr{F}(X, \mathbb{K})$ alors u est **continue** en x_0.

Démonstration. Prévoir un graphique et une animation pour illustrer

Soit (u_n) une suite de fonctions continues de $\mathscr{F}(X, \mathbb{K})$, **convergeant uniformément** vers une fonction u de $\mathscr{F}(X, \mathbb{K})$.

Soit $x_0 \in X$ et soit $\varepsilon > 0$, rappelons que l'on doit montrer que :

$$\exists \eta > 0, \forall x \in X, |x - x_0| \leqslant \eta \Rightarrow |u(x) - u(x_0)| \leqslant \varepsilon$$

définition de la continuité en un point x_0.

Comme la suite de fonction (u_n) converge uniformément vers u sur X :

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant n_0, \forall x \in X, |u_n(x) - u(x)| \leqslant \frac{\varepsilon}{3}$$

On a alors :
$$\forall x \in X, |u_{n_0}(x) - u(x)| \leqslant \frac{\varepsilon}{3}$$
Donc :
$$\forall x \in X, |u(x) - u(x_0)| \leqslant |u(x) - u_{n_0}(x)| + |u_{n_0}(x) - u_{n_0}(x_0)| + |u_{n_0}(x_0) - u(x_0)| \leqslant \frac{2\varepsilon}{3} + |u_{n_0}(x) - u_{n_0}(x_0)|$$
Comme la fonction u_{n_0} est continue en x_0, on a :
$$\exists \eta > 0, \forall x \in X, |x - x_0| \leqslant \eta \Rightarrow |u_{n_0}(x) - u_{n_0}(x_0)| \leqslant \frac{\varepsilon}{3}$$
On a donc :
$$\exists \eta > 0, \forall x \in X, |x - x_0| \leqslant \eta \Rightarrow |u(x) - u(x_0)| \leqslant \varepsilon$$
D'où la continuité de u en x_0. □

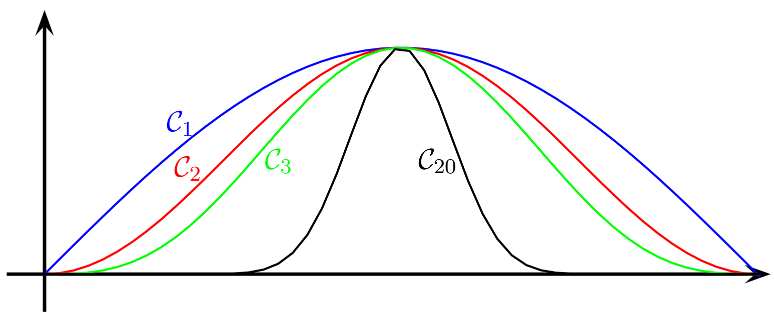
Vidéo de la démonstration.

Corolaire 6

Soit (u_n) une suite de fonctions **continues** de $\mathscr{F}(X, \mathbb{K})$, **convergeant uniformément** vers une fonction u de $\mathscr{F}(X, \mathbb{K})$ alors u est **continue** sur X.

Démonstration. On applique le théorème précédent en tout point de X. □

Exemple 14. La suite de fonctions (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par $u_n : \begin{array}{ccc} [0,\pi] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sin(x)^n \end{array}$



Lien vers l'animation.

Lien vers la vidéo

Exemple 15. Si l'on reprend la suite de fonctions précédente (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par
$$u_n : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \left(x^2 + \frac{1}{n^2}\right)^{\frac{1}{2}} \end{array}$$
Si l'on note $|.|$ la fonction valeur absolue définie sur $\mathbb{R}$ vers laquelle nous avons montré que la suite de fonction converge simplement puis uniformément vers la fonction valeur absolue. Le théorème précédent permet d'affirmer que la fonction valeur absolue est continue sur $\mathbb{R}$ puisque les fonction u_n sont continues sur $\mathbb{R}$ (nous n'avions pas besoin de ça pour le savoir)

Lien vers l'animation.

Exemple 16. (contre exemple) Si l'on reprend la suite de fonctions (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par

$$\begin{array}{rcll} u_n & : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ nx & \text{si } x \in \left[0, \dfrac{1}{n}\right] \\ 1 & \text{si } x \geqslant \dfrac{1}{n} \end{cases} \end{array}$$

Les fonctions u_n sont continues. En effet, elle sont affines par morceaux donc continue sur sur $\mathbb{R}\backslash\left\{0, \dfrac{1}{n}\right\}$ et on montre la continuité en 0 et $\dfrac{1}{n}$ par égalité des limites à gauche et à droite en ces points.

Si l'on choisit $x > 0$ alors en posant $n_0 = \lfloor \dfrac{1}{x} \rfloor$, on a $\dfrac{1}{x} \leqslant n_0$ donc $x \geqslant \dfrac{1}{n_0}$

$$\forall n \geqslant n_0,\ \frac{1}{n} \leqslant x \Rightarrow u_n(x) = 1$$

Si l'on choisit $x \leqslant 0$ alors $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n(x) = 0$

Donc la suite de fonctions (u_n) converge simplement vers la fonction u définie par :

$$u(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si} x \leqslant 0 \end{cases}$$

Cette fonction u est n'est évidement pas continue en 0, or si la convergence avait été uniforme la fonction u aurait été continue. La convergence n'est donc pas uniforme sur $\mathbb{R}$.

Autre méthode plus rapide ici : On aurait pu le démontrer en remarquant

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in \mathbb{R},\ \|u_n - u\|_\infty \geqslant \left|u_n(x) - u(x)\right| \geqslant \lim_{x \to 0^+} \left|u_n(x) - u(x)\right| = 1$$

(On peut d'ailleurs facilement montrer que cette norme est égale à 1 car majorée par 1)

Dés lors la convergence n'est pas uniforme.

Lien vers l'animation.

D Convergence uniforme et dérivation

***Problématique* 3.** Pour une suite (u_n) de fonctions dérivables, suivant la nature de la convergence éventuelle de la suite de (u_n) vers une fonction u et de ses dérivées, que peut-on dire de la dérivabilité de u.

Rappel : Inégalité des accroissements finis : Si f est une fonction définie de $[a, b] \subset \mathbb{R}$ et dérivable sur $]a, b[$, alors :

$$|f(b) - f(a)| \leqslant \sup_{x \in]a,b[} |f'(x)| \times |b - a|$$

Définition 9 (généralisation dans $\mathbb{C}$)

Si f est une fonction définie de $\Omega \subset \mathbb{C}$ un ouvert de $\mathbb{C}$ à valeur dans $\mathbb{C}$.
Alors f sera dite dérivable en $z_0 \in \Omega$, si :

$$\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \text{ admet une limite en } z_0$$

Cette limite est notée $f'(z_0)$.

Théorème 7 (des accroissements finis sur $\mathbb{C}$)

Si f est une fonction définie de $\Omega \subset \mathbb{C}$ un ouvert de $\mathbb{C}$ à valeur dans $\mathbb{C}$ et est dérivable sur Ω.
Si $a, b \in \Omega$, alors :

$$|f(b) - f(a)| \leqslant \sup_{z \in]a,b[} |f'(z)| \times |b - a|$$

prévoir graphique pour illustrer le segment.

Théorème 8

Soit (u_n) une suite de fonctions de $\mathscr{F}(X, \mathbb{K})$, dérivable sur X, **où X cette fois est un ouvert de** $\mathbb{K}$, telle que :

- La suite (u_n) converge simplement sur Ω vers u définie sur X,
- La suite (u'_n) converge localement uniformément sur X vers g définie sur X,

Alors :

- La suite (u_n) converge localement uniformément sur X vers u,
- u est dérivable sur X avec $u' = g$.

Démonstration. Soit $x_0 \in X$ et $\eta_0 > 0$ de sorte que (u'_n) converge uniformément sur $B(x_0, \eta_0)$.

a. Commençons par la convergence locale uniforme sur X.
Montrons que (u_n) vérifie le critère de Cauchy-Uniforme sur $B(x_0, \eta_0)$
Soit $p, q \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned}
\forall x \in B(x_0, \eta_0), |u_p(x) - u_q(x)| &\leqslant |(u_p - u_q)(x) - (u_p - u_q)(x_0)| + |u_p(x_0) - u_q(x_0)| \\
&\leqslant \left\|u'_p - u'_q\right\|_{\infty, B(x_0,\eta_0)} |x - x_0| + |u_p(x_0) - u_q(x_0)| \\
&\leqslant \left\|u'_p - u'_q\right\|_{\infty, B(x_0,\eta_0)} \eta_0 + |u_p(x_0) - u_q(x_0)|
\end{aligned}$$

Soit $\varepsilon > 0$ du fait de la convergence uniforme de la suite des (u'_n) sur $B(x_0, \eta_0)$, elle vérifie de critère de Cauchy Uniforme. Donc, on a :

$$\exists n_0 \in N, \ \forall p, q \geqslant n_0, \left\|u'_p - u'_q\right\|_{\infty, B(x_0,\eta_0)} \leqslant \frac{\varepsilon}{2\eta_0}$$

Par convergence simple de (u_n) , la suite $(u_n(x_0))$ converge et donc vérifie le critère de Cauchy.

$$\exists n_1 \in \mathbb{N}, \forall p, q \geqslant n_1, \ |u_p(x_0) - u_q(x_0)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$$

On pose $n_2 = \max(n_0, n_1)$. Et on obtient :

$$\forall p, q \geqslant n_2, \forall x \in B(x_0, \eta_0) |u_p(x) - u_q(x)| \leqslant \varepsilon$$

Donc le suite de fonction (u_n) vérifie le critère de Cauchy uniforme sur $B(x_0, \eta_0)$ et donc la convergence est uniforme (vers sa limite simple) sur $B(x_0, \eta_0)$.
La convergence est donc local uniforme.

b. Montrons que u est dérivable en tout point $x_0 \in X$. Soit $\eta_0 > 0$ de sorte que la sites des (u'_n) converge uniformément sur $B(x_0, \eta_0)$.

On définie sur $B(x_0,\eta_0)$ les fonctions φ_n et φ sur $B(x_0,\eta_0)$ par :

$$\varphi_n(x)=\begin{cases}\dfrac{u_n(x)-u_n(x_0)}{x-x_0} & \text{si } x\in surB(x_0,\eta_0)\backslash\{x_0\}\\ u_n'(x_0) & \text{si } x=x_0\end{cases}\qquad \text{et}\quad \varphi(x)=\begin{cases}\dfrac{u(x)-u(x_0)}{x-x_0} & \text{si } x\in B(x_0,\eta_0)\backslash\{x_0\}\\ g(x_0) & \text{si } x=x_0\end{cases}$$

• Les fonctions φ_n sont continues. (puisque u_n dérivable en x_0)
• Par ailleurs la suite de fonctions (φ_n) converge simplement vers la fonction φ. (évident car la suite (u_n) converge vers u et la suite (u_n') vers g.
• Montrons que (φ_n) vérifie le critère de Cauchy uniforme sur $B(x_0,\eta_0)$.
Soit donc $p,q\in\mathbb{N}$.
Si $x\neq x_0$,

$$\varphi_p(x)-\varphi_q(x)=\frac{1}{x-x_0}\left(\left(u_p-u_q\right)(x)-\left(u_p-u_q\right)(x_0)\right)$$

D'après l'inégalité des accroissements finis l'on a :

$$|\left(u_p-u_q\right)(x)-\left(u_p-u_q\right)(x_0)|\leqslant\left\|u_p'-u_q'\right\|_{\infty,B(x_0,\eta_0)}|x-x_0|$$

Donc :

$$\left|\varphi_p(x)-\varphi_q(x)\right|\leqslant\left\|u_p'-u_q'\right\|_{\infty,B(x_0,\eta_0)}$$

Si $x=x_0$,

$$\left|\varphi_p(x_0)-\varphi_q(x_0)\right|=\left|u_p'(x_0)-u_q'(x_0)\right|\leqslant\left\|u_p'-u_q'\right\|_{\infty,B(x_0,\eta_0)}$$

Donc $\forall x\in B(x_0,\eta_0),\ \left|\varphi_p(x)-\varphi_q(x)\right|\leqslant\left\|u_p'-u_q'\right\|_{\infty,B(x_0,\eta_0)}$
Donc $\left\|\varphi_p-\varphi_q\right\|_{\infty,B(x_0,\eta_0)}\leqslant\left\|u_p'-u_q'\right\|_{\infty,B(x_0,\eta_0)}$
Donc (φ_n) vérifie le critère de Cauchy Uniforme. Donc la suite de fonctions (φ_n) converge uniformément vers φ sur $B(x_0,\eta_0)$. Donc φ est continue en x_0 comme limite uniforme d'une suite de fonctions continues en x_0.
Donc : $\displaystyle\lim_{x\to x_0}\frac{u_n(x)-u_n(x_0)}{x-x_0}=g(x_0)$.
Donc u est dérivable en x_0 avec $u'(x_0)=g(x_0)$ et ceci pour tout $x_0\in X$.

□

Corolaire 9

Avec les hypothèses du théorème précédent si les fonctions (u_n) sont $\mathscr{C}^1$ alors u est $\mathscr{C}^1$.

Démonstration. Les (u_n') sont continues et convergent uniformément vers u' donc avec le corolaire 6, u' est continue. □

Exemple 17. *On peut avoir une convergence uniforme d'une suite de fonction dérivable sans que la fonction limite soit dérivable.*

Si (u_n) est une suite de fonction définie pour $n\in\mathbb{N}$ par :

$$u_n\ :\ \begin{array}{rcl}\mathbb{R} & \to & \mathbb{R}\\ x & \mapsto & \sqrt{x+\dfrac{1}{n}}\end{array}$$

Alors $u'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x+\dfrac{1}{n}}}$

Cette suite converge simplement vers la fonction (racine carré) :

$$\begin{array}{rcccl} u & : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & \sqrt{x} \end{array}$$

Et la suite de ces fonctions dérivées (u_n') converge aussi simplement vers u'

Pour étudier la convergence uniforme l'on étudie la fonction :

$$\begin{array}{rcccl} v_n & : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & u_n(x) - u(x) \end{array}$$

Alors $v'(x) = \dfrac{\sqrt{x} - \sqrt{x + \dfrac{1}{n}}}{2\sqrt{x}\sqrt{x + \dfrac{1}{n}}} < 0$ Donc :

x	0 $\quad\quad\quad\quad$ $+\infty$
$v_n'(x)$	$-$
$v_n(x)$	$\dfrac{1}{\sqrt{n}} \searrow 0$

Donc $\|u_n - u\|_{\infty,[0,+\infty[} = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ donc la limite est nulle. Donc la convergence de la suite (u_n) est uniforme.

Pourtant la fonction racine n'est pas dérivable en 0. Donc la convergence de la suite des (u_n') n'est pas uniforme sinon le théorème 8 pourrait s'appliquer.

En revanche si l'on se restreint à $[a, +\infty[$ avec $a > 0$ cela fonctionne : la convergence de la suite (u_n') est bien uniforme.

E Convergence et intégration

***Problématique* 4.** Si (f_n) est une suite de fonctions de $\mathscr{F}([a,b],\mathbb{R})$ définie sur $[a,b]$, qui converge vers une fonction f de $\mathscr{F}([a,b],\mathbb{R})$. Quelles hypothèses sont suffisantes pour avoir :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(t)\mathrm{d}t = \int_a^b \left(\lim_{n\to+\infty} f_n\right)(t)\mathrm{d}t$$

1 Cas simple

Théorème 10

Soit (f_n) une suite de fonctions de $\mathscr{C}([a,b],\mathbb{K})$ (ensemble des fonctions continues sur $[a,b]$) convergeant uniformément vers f sur $[a,b]$ alors f est continue sur $[a,b]$ (voir proposition 3) et :

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(t)\mathrm{d}t$$

Démonstration. Soit (f_n) une suite de fonctions de $\mathscr{C}([a,b],\mathbb{K})$ convergeant uniformément vers f sur $[a,b]$.

Donc :

$$\forall x \in [a,b],\ |f(t) - f_n(t)| \leqslant \|f(t) - f_n(t)\|_{\infty,[a,b]}$$

Donc :

$$\left|\int_a^b f(t)\mathrm{d}t - \int_a^b f_n(t)\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_a^b |f(t) - f_n(t)|\mathrm{d}t \leqslant \|f(t) - f_n(t)\|_{\infty,[a,b]} \int_a^b \mathrm{d}t = \|f(t) - f_n(t)\|_{\infty,[a,b]}\,(b-a)$$

Comme la convergence est uniforme $\lim_{n\to+\infty} \|f(t)-f_n(t)\|_{\infty,[a,b]} = 0$. Donc :

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = \lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(t)\mathrm{d}t$$

□

Exemple 18. Si l'on considère la suite fonction (u_n) étudier en TD définie par :

$$\begin{array}{cccc} f_n & : & [0,1] & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & \left(1-\dfrac{x}{n}\right)^n \end{array}$$

dont on a montré la convergence uniforme vers :

$$\begin{array}{cccc} u & : & [0,1] & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & \mathrm{e}^{-x} \end{array}$$

On a :

$$\int_0^1 f_n(t)\mathrm{d}t = \int_0^1 \left(1-\frac{x}{n}\right)^n \mathrm{d}t = \left[\frac{-n}{n+1}\left(1-\frac{x}{n}\right)^{n+1}\right]_0^1 = \frac{n}{n+1}\left[1-\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n+1}\right]$$

De plus :

$$\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t = \int_0^1 \mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}t = \left[-\mathrm{e}^{-x}\right]_0^1 = 1-\mathrm{e}^{-1}$$

En utilisant le théorème précédent l'on obtient :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n}{n+1}\left[1-\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n+1}\right] = 1-\mathrm{e}^{-1}$$

Résultat que l'on peut obtenir avec des $DL_n(0)$ (où même par équivalent) en $u = \frac{1}{n}$.

Exemple 19. *Attention ce résultat n'est plus correct si la convergence n'est que simple.*
Si l'on définie la suite (f_n) par :

$$\begin{array}{cccc} f_n & : & [0,1] & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin \left]0,\dfrac{1}{n}\right[\\ n & \text{si } x \in \left]0,\dfrac{1}{n}\right[\end{cases} \end{array}$$

Alors cette suite converge simplement vers la fonction f nulle sur $[0,1]$. On a :

$$\int_0^1 f_n(t)\mathrm{d}t = [nx]_0^{\frac{1}{n}} = 1 \qquad \text{et} \qquad \int_0^1 f(t)\mathrm{d}t = 0$$

Donc :

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t \neq \lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(t)\mathrm{d}t$$

Prévoir une animation.

Exemple 20. *Attention ce résultat n'est plus correct si l'intégrale est impropre.*
Si l'on définie la suite (f_n) par :

$$\begin{array}{cccc} f_n & : & [0,1] & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & \dfrac{1}{n}\mathbb{1}_{[-n,n]} \end{array}$$

Alors cette suite converge uniformément vers la fonction f nulle sur $\mathbb{R}$. En effet $\|f_n\|_\infty = \dfrac{1}{n} \to 0$. On a :

$$\int_0^1 f_n(t)\mathrm{d}t = \left[\frac{x}{n}\right]_{-n}^{n} = 2 \qquad \text{et} \qquad \int_0^1 f(t)\mathrm{d}t = 0$$

Donc :

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t \neq \lim_{n\to+\infty} \int_a^b f_n(t)\mathrm{d}t$$

Prévoir une animation.

Remarque 6. Du fait de tous ces cas où le théorème est mis en défaut l'on à un théorème plus *puissance*.

2 Généralisation : Théorème de convergence dominée.

Théorème 11 (de convergence dominée : généralisation du théorème précédent)

Soit (f_n) une suite de $\mathscr{F}(I,\mathbb{K})$, et f et φ deux fonctions de $\mathscr{F}(I,\mathbb{R})$ avec φ positive. On suppose :

- (f_n) converge simplement vers f sur I
- f intégrable sur tout segment inclus dans $[a,b]$.
- $\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in I, \quad |f_n(t)| \leqslant \varphi(t)$
- La fonction φ est intégrable sur I.

Alors toutes les fonctions f_n et f sont intégrables sur I, et on a :

$$\int_I f(t)\mathrm{d}t = \lim_{n\to+\infty} \int_I f_n(t)\mathrm{d}t$$

Démonstration. Admis. □

Exemple 21. Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos\left(\frac{x}{n}\right)}{1+x^2}\mathrm{d}x$.

Ici, $a = -\infty$ et $b = -\infty$ et

$$\begin{array}{rccc} u_n & : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & x \mapsto \dfrac{\cos\left(\frac{x}{n}\right)}{1+x^2} \end{array}$$

- Les fonctions f_n sont continues sur $\mathbb{R}$ donc intégrables sur tous segments de $\mathbb{R}$.
- La suite de fonctions (f_n) converge simplement vers la fonction f définie par :

$$\begin{array}{rccc} f & : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & & x & \mapsto & \dfrac{1}{1+x^2} \end{array}$$

- Enfin :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ |f_n(x)| \leqslant f(x) \qquad \text{ici } \varphi = f \text{ convient}$$

Or f est continue sur $\mathbb{R}$ et $f(x) \underset{\pm\infty}{\sim} \dfrac{1}{x^2}$.

C'est une intégrale de Riemann qui converge donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos\left(\frac{x}{n}\right)}{1+x^2}\mathrm{d}x \frac{1}{x^2} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x = \pi$. (A rédiger)

Lien vers l'animation.

III Série de fonctions

***Problématique* 5.** On considère une suite de fonction (u_n).

- Que peut-on dire de la converge de des sommes partielles $S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} u_n(x)$
- Si il y a convergence des sommes partielles (vers donc $S(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} u_n(x)$) suivant la nature de la convergence (normale, uniforme, simple) et les caractéristiques des u_n (continuité, dérivabilité...) , que peut-on dire de la fonction S.

A Types de convergences

1 Convergence simple, uniforme et Cauchy-Uniforme

Définition 10

On dit que la série de fonction $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ où (u_n) est une suite de fonction de $\mathscr{F}(X, \mathbb{K})$ convergence simplement (respectivement uniformément, respectivement Cauchy-Uniforme respectivement localement uniformément) si la suite constituée des sommes partielles converge simplement (respectivement uniformément respectivement Cauchy-Uniformément respectivement localement uniformément) .

Exemple 22. On définie la suite de fonctions (u_n) par :

$$u_n \;:\; \begin{array}{ccc}]-1,1[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^n \end{array}$$

Alors les sommes partielle vérifie :

$$\forall x \in]-1,1[,\; S_N(x) = \sum_{n=0}^{N} u_n(x) = \sum_{n=0}^{N} x^n = \frac{1-x^{N+1}}{1-x} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{1-x}$$

Donc la série de fonction $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ converge simplement vers :

$$S \;:\; \begin{array}{ccc}]-1,1[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{1}{1-x} \end{array}$$

Proposition 12

Dés lors les résultats connues pour les suites s'applique aux séries. Si l'on considère une suite de fonction (u_n) de $\mathscr{F}(X, \mathbb{K})$. Alors :

- Si la série $\sum u_n$ converge uniformément sur X vers S et que les u_n sont continues en $x_0 \in X$ alors S est continues en x_0
- Si la série $\sum u_n$ converge uniformément sur X vers S et que les u_n sont continues sur X alors S est continues X
- $\sum u_n$ converge uniformément sur X si et seulement si $\sum u_n$ vérifie le critère de Cauchy-Uniforme.

2 Convergence absolue

Définition 11

On dit que la série de fonctions $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ où (u_n) est une suite de fonction de $\mathscr{F}(X,\mathbb{K})$, converge absolument si la série de fonctions $\sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|$

Proposition 13

Si la série de fonctions $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ converge absolument elle converge simplement

Démonstration 1. Pour $x \in X$ si $\sum_{n=0}^{+\infty} |u_n(x)|$ est une série convergente alors $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n(x)$ converge (cours du semestre 3 sur les séries) Donc $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ converge simplement.

Exemple 23. Si l'on note $U = \{z \in C||z| < 1\}$. Donc la série de fonction $\sum_{n=0}^{+\infty} z^n$ converge absolument sur U.

En effet, si $z \in U$ alors $|z| < 1$ et la série $\sum_{n=0}^{+\infty} |z|^n$ converge (vers $\dfrac{1}{1-|z|}$ voir exemple précédent.
Cette série est une série entière (Module suivant)

3 Convergence normale

Définition 12

On dit que la série de fonctions $\sum u_n$ où les (u_n) sont des fonctions de $\mathscr{F}(X,\mathbb{R})$ converge normalement sur X si et seulement si la série réelle de terme général $\|u_n\|_{\infty,X}$ est convergente.

Proposition 14

La convergence normale une série de fonction $\sum u_n$ sur X implique la convergence uniforme de la série sur X.

Démonstration 2. Soit $\sum u_n$ une série normalement convergente. Nous allons montrer qu'elle vérie le critère de Cauchy-Uniforme. On pose $S_N = \sum_{k=0}^{N} u_k$ les somme partielle. Soit $n, p \in \mathbb{N}$

$$\forall x \in X, |\sum_{k=n}^{n+p} u_k(x)| \leqslant \sum_{k=n}^{n+p} |u_k(x)| \leqslant \sum_{k=n}^{n+p} \|u_n\|_{\infty,X} \leqslant \sum_{k=n}^{+\infty} \|u_n\|_{\infty,X}$$

Or, puisque la convergence est normal $\sum_{k=0}^{+\infty} \|u_k\|_{\infty,X}$ converge, donc $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=n}^{+\infty} \|u_k\|_{\infty,X} = 0$ soit $\varepsilon > 0$,

$$\exists n_0 \geqslant 0, \forall n \geqslant n_0,\ \sum_{k=n}^{+\infty} \|u_k\|_{\infty,X} \leqslant \varepsilon$$

On a donc montrer que :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant N_0, \forall p \in \mathbb{N},\ \forall x \in X, |\sum_{k=n}^{n+p} u_k(x)| \leqslant \varepsilon$$

Donc la série $\sum u_n$ vérifie le critère de Cauchy-Uniforme. Elle est donc uniformément convergente.

Remarque *7.* On a :

$$\text{Convergence normale} \Rightarrow \begin{array}{c}\text{Convergence absolue}\\ \text{Convergence uniforme}\end{array} \Rightarrow \text{Convergence simple}$$

Exemple 24. Prévoir un exemple où l'on a la convergence absolue mais pas uniforme et inversement.

B Propriétés de la somme

***Problématique* 6.** Conservation de la continuité et de la dérivabilité des fonctions u_n par passage à la somme. Le théorème suivant n'est que l'application des résultats déjà obtenus appliqués aux sommes partielles de la séries.

Théorème 15

Si les suites (u_n) sont continues en $x_0 \in X$, si la série converge uniformément sur un voisinage de x_0 alors sa somme est continue en x_0.
Si les u_n sont continues sur X et que la convergence est localement uniforme sur X alors sa somme est continue sur X.

Théorème 16

Si les suites (u_n) sont continues en $x_0 \in X$, si la série converge uniformément sur un voisinage de x_0 alors sa somme est continue en x_0.

Exemple 25. Prévoir un exemple.

C Échange somme et intégrale

***Problématique* 7.** Condition d'interversion de ces deux signes. les deux théorèmes suivants ne sont que les résultats déjà obtenus appliqués aux sommes partielles de la séries.