൫ Baccalauréat S Métropole ൫
27 Mars 2020

EXERCICE 1 — 10 points

Commun à tous les candidats

Partie A

On considère la fonction h définie sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ par :

$$h(x) = x\mathrm{e}^{-x}.$$

1. Déterminer la limite de la fonction h en $+\infty$.
2. Étudier les variations de la fonction h sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ et dresser son tableau de variations.
3. L'objectif de cette question est de déterminer une primitive de la fonction h.
   - **a.** Vérifier que pour tout nombre réel x appartenant à l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$, on a :

     $$h(x) = \mathrm{e}^{-x} - h'(x)$$

     où h' désigne la fonction dérivée de h.
   - **b.** Déterminer une primitive sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ de la fonction $x \longmapsto \mathrm{e}^{-x}$.
   - **c.** Déduire des deux questions précédentes une primitive de la fonction h sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$.

Partie B

On définit les fonctions f et g sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = x\mathrm{e}^{-x} + \ln(x+1) \qquad \text{et} \qquad g(x) = \ln(x+1).$$

On note $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ les représentations graphiques respectives des fonctions f et g dans un repère orthonormé.

Ces deux courbes sont tracées en annexe page ??. Cette annexe est à rendre avec la copie.

1. Pour un nombre réel x appartenant à l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$, on appelle M le point de coordonnées $(x\,;\,f(x))$ et N le point de coordonnées $(x\,;\,g(x))$: M et N sont donc les points d'abscisse x appartenant respectivement aux courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$.
   - **a.** Déterminer la valeur de x pour laquelle la distance MN est maximale et donner cette distance maximale.
   - **b.** Placer sur le graphique fourni en annexe page **??** les points M et N correspondant à la valeur maximale de MN.
2. Soit λ un réel appartenant à l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$. On note D_λ le domaine du plan délimité par les courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ et par les droites d'équations $x = 0$ et $x = \lambda$.
   - **a.** Hachurer le domaine D_λ. correspondant à la valeur λ proposée sur le graphique en annexe page **??**.
   - **b.** On note A_λ l'aire du domaine D_λ, exprimée en unités d'aire. Démontrer que :

     $$A_\lambda = 1 - \frac{\lambda+1}{\mathrm{e}^\lambda}.$$

c. Calculer la limite de A_λ lorsque λ tend vers $+\infty$ et interpréter le résultat.

3. On considère l'algorithme suivant :

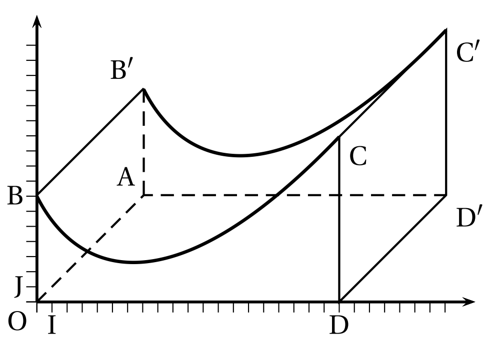
Variables :	
	λ est un réel positif
	S est un réel strictement compris entre 0 et 1.
Initialisation :	
	Saisir S
	λ prend la valeur 0
Traitement :	
	Tant Que $1-\dfrac{\lambda+1}{\mathrm{e}^{\lambda}} < S$ faire
	$\quad$ λ prend la valeur $\lambda+1$
	Fin Tant Que
Sortie :	
	Afficher λ

a. Quelle valeur affiche cet algorithme si on saisit la valeur $S = 0,8$?

b. Quel est le rôle de cet algorithme ?

EXERCICE 2 — 10 points

Commun à tous les candidats



Une municipalité a décidé d'installer un module de skateboard dans un parc de la commune.
Le dessin ci-contre en fournit une perspective cavalière. Les quadrilatères OAD′D, DD′C′C, et OAB′B sont des rectangles.
Le plan de face (OBD) est muni d'un repère orthonormé (O, I, J).
L'unité est le mètre. La largeur du module est de 10 mètres, autrement dit, DD′ = 10, sa longueur OD est de 20 mètres.

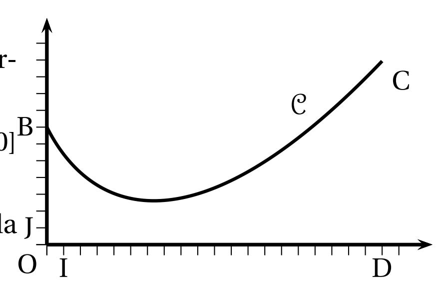
Le but dit problème est de déterminer l'aire des différentes surfaces à peindre.

Le profil du module de skateboard a été modélisé à partir d'une photo par la fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;\,20]$ par

$$f(x) = (x+1)\ln(x+1) - 3x + 7.$$

On note f' la fonction dérivée de la fonction f et $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans le repère (O, I, J).

Partie 1



1. Montrer que pour tout réel x appartenant à l'intervalle $[0\,;\,20]$, on a $f'(x) = \ln(x+1) - 2$.
2. En déduire les variations de f sur l'intervalle $[0\,;\,20]$ et dresser son tableau de variation.
3. Calculer le coefficient directeur de la tangente à la courbe $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 0.

La valeur absolue de ce coefficient est appelée l'inclinaison du module de skateboard au point B.

4. On admet que la fonction g définie sur l'intervalle $[0\,;\,20]$ par

$$g(x) = \frac{1}{2}(x+1)^2\ln(x+1) - \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}x$$

a pour dérivée la fonction g' définie sur l'intervalle $[0\,;\,20]$ par $g'(x) = (x+1)\ln(x+1)$.
Déterminer une primitive de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;\,20]$.

Partie 2

Les trois questions de cette partie sont indépendantes

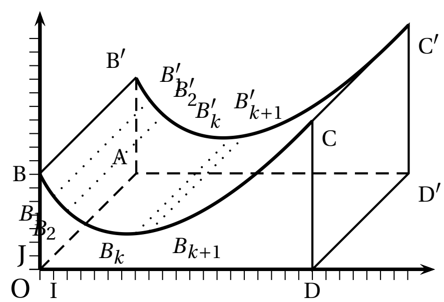
1. Les propositions suivantes sont-elles exactes ? Justifier les réponses.

P_1 : La différence de hauteur entre le point le plus haut et le point le plus bas de la piste est au moins égale à 8 mètres.

P_2 : L'inclinaison de la piste est presque deux fois plus grande en B qu'en C.

2. On souhaite recouvrir les quatre faces latérales de ce module d'une couche de peinture rouge. La peinture utilisée permet de couvrir une surface de 5 m^2 par litre.
Déterminer, à 1 litre près, le nombre minimum de litres de peinture nécessaires.

3. On souhaite peindre en noir la piste roulante, autrement dit la surface supérieure du module.
Afin de déterminer une valeur approchée de l'aire de la partie à peindre, on considère dans le repère (O, I, J) du plan de face, les points $B_k(k\,;\,f(k))$ pour k variant de 0 à 20.
Ainsi, $B_0 = $ B.



On décide d'approcher l'arc de la courbe $\mathcal{C}$ allant de B_k à B_{k+1} par le segment $[B_kB_{k+1}]$.
Ainsi l'aire de la surface à peindre sera approchée par la somme des aires des rectangles du type $B_kB_{k+1}B'_{k+1}B'_k$ (voir figure).

a. Montrer que pour tout entier k variant de 0 à 19,
$B_kB_{k+1} = \sqrt{1 + [f(k+1) - f(k)]^2}$.

b. Compléter l'algorithme suivant pour qu'il affiche une estimation de l'aire de la partie roulante.

Variables	S : réel K : entier
Fonction	f : définie par $f(x) = (x+1)\ln(x+1) - 3x + 7$
Traitement	S prend pour valeur 0 Pour K variant de … à … S prend pour valeur …… Fin Pour
Sortie	Afficher …