Feuille d'exercices 12 : dérivation et primitives.

Exercice 1

Dériver chacune des fonctions suivantes (sans justification sur l'existence de la dérivée) :

$$f(x)=\frac{3-x}{x+1}\ ;\qquad g(x)=\frac{1}{2-x}\ ;\qquad h(x)=(x^3-2x^2+4)^5\ ;\qquad i(x)=\frac{\mathrm{e}^{2x}}{x^2-3}\ ;$$
$$j(x)=x^2\ln x\ ;\qquad k(x)=e^{x+\frac{1}{x}}\ ;\qquad l(x)=\sin(x^3-2x)\ ;\qquad m(x)=\ln(1+x^2)\ ;$$
$$n(x)=\sqrt{2x^2+2x+3}\ ;\qquad r(x)=\cos\left(\frac{1}{x}\right)\ ;\qquad s(x)=e^{\tan x}\ ;\qquad t(x)=\sqrt{1+x\mathrm{e}^{-x}}\ ;$$
$$u(x)=\ln\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)\ ;\qquad v(x)=\frac{\cos x}{x\cos x-\sin x}\ ;\qquad w(x)=\ln\left(\frac{x-2}{x+2}\right).$$

Exercice 2

On pose $f(x)=\dfrac{e^x}{1+\mathrm{e}^x}$ et on note $\mathcal{C}$ le graphe de f dans un repère orthonormé.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.
2. Étudier les variations de la fonction f.
3. Déterminer une équation de la tangente $\mathcal{T}$ à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 0.
4. Étudier la position de $\mathcal{C}$ par rapport à $\mathcal{T}$.

Exercice 3

Montrer que :

$$\forall x\in\mathbb{R}_+,\quad \ln(1+x)\geq x-\frac{x^2}{2}.$$

Résoudre alors dans $\mathbb{R}$ l'équation $\ln(1+x)=x-\dfrac{x^2}{2}$.

Exercice 4

Étudier les fonctions f, g et h définies par :

$$f(x)=x^3-3x^2+x+1\ ;\qquad g(x)=\left(1-\frac{1}{x}\right)\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\ ;\qquad h(x)=\sqrt{x^2+x+1}.$$

Exercice 5

Sans se soucier des ensembles de dérivation, calculer les dérivées partielles des fonctions définies par :

$$f(x,y)=x^2+7xy+4\ ;\qquad g(x,y)=\frac{x^2}{y}\ ;\qquad h(x,y)=\ln(x^3+2y)\ ;$$
$$k(x,y)=\sin\left(\frac{x}{y}\right)\ ;\qquad l(x,y)=\sqrt{2x+3y}\ ;\qquad m(x,y)=(x^2+y^2)\mathrm{e}^{-xy}.$$

Exercice 6

On définit les fonctions f et g par :

$$f:\begin{array}{ccc}\mathbb{R}&\to&\mathbb{R}\\ x&\mapsto&(x^2+4x+3)\mathrm{e}^x\end{array}\qquad \text{et}\qquad g:\begin{array}{ccc}\mathbb{R}&\to&\mathbb{R}\\ x&\mapsto&(x^2+2x+1)\mathrm{e}^x\end{array}$$

Montrer que g est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

Exercice 7

Soit $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{1}{x} \end{array}$.

On définit les fonctions F et G sur $\mathbb{R}^*$ par :

$$F : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \ln(|x|) \end{array} \quad \text{et} \quad G : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^* & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} \ln(x) & \text{si } x > 0 \\ \ln(-x) + 3 & \text{si } x < 0 \end{cases} \end{array}$$

1. Étudier la parité de la fonction F et déterminer l'expression de sa dérivée. Que peut-on dire de F et f ?
2. Déterminer l'expression de la dérivée de G.
3. La fonction $G - F$ est-elle constante ?

Exercice 8

Pour $x > 3$, on pose $f(x) = \dfrac{1}{(x+1)(x-3)}$.

1. Déterminer deux réels a et b tels que :
$$\forall x > 3,\ f(x) = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{x-3}.$$
2. En déduire une primitive de f sur $]3, +\infty[$.

Exercice 9

À l'aide de primitivations par parties, déterminer une primitive, sur l'intervalle I indiqué, des fonctions suivantes :

$$f(x) = (x+3)\mathrm{e}^{2x} \quad (I = \mathbb{R}) \ ; \quad g(x) = x\cos x \quad (I = \mathbb{R}) \ ; \quad h(x) = \ln(x+3) \quad (I =]-3, \infty[) \ ;$$
$$k(x) = \frac{\ln x}{x^2} \quad (I = \mathbb{R}_+^*) \ ; \qquad l(x) = x^2 \ln x \quad (I = \mathbb{R}_+^*) \ ; \quad m(x) = (x^2 + 2x + 3)\mathrm{e}^x \quad (I = \mathbb{R}).$$

Exercice 10

On pose $h(x) = \dfrac{1}{x-3} - \dfrac{1}{x-4}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de h.
2. Déterminer une primitive de h sur chacun des intervalles constituant son ensemble de définition.

Exercice 11

Pour $x > 3$, on pose $f(x) = \dfrac{1}{(x+1)(x-3)}$.

1. Déterminer deux réels a et b tels que :
$$\forall x > 3,\ f(x) = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{x-3}.$$
2. En déduire une primitive de f sur $]3, +\infty[$.

Exercice 12

Soit la fonction $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & 3(x-1)^2 \end{array}$. Déterminer une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

Exercice 13

Dans un premier temps, indiquer les formules présentes dans le tableau "Opérations sur les primitives" à utiliser pour la détermination d'une primitive pour chaque fonction proposée quand c'est possible.

Attention préciser si selon vous aucune formule ne convient pour une résolution "directe".

Dans un deuxième temps déterminer une primitive de chacune de ces fonctions sur l'intervalle I indiqué.

Fonctions	Formules *"Opérations sur les primitives"*
$f(x) = 2x^3 + x^2 - 1 \quad (I = \mathbb{R})$	
$g(x) = \cos x + \sin(2x) \quad (I = \mathbb{R})$	
$h(x) = \mathrm{e}^{2x+1} \quad (I = \mathbb{R})$	
$i(x) = \dfrac{x}{x^2+1} \quad (I = \mathbb{R})$	
$j(x) = \dfrac{x}{(x^2+1)^2} \quad (I = \mathbb{R})$	
$k(x) = \dfrac{x^2+x+1}{(x^2+1)^2} \quad (I = \mathbb{R})$	
$m(x) = \dfrac{1}{x-2} \quad (I = \left]-\infty, 2\right[)$	
$n(x) = x(x^2-3)^7 \quad (I = \mathbb{R})$	
$p(x) = \sin^2 x \cos x \quad (I = \mathbb{R})$	
$q(x) = \dfrac{2x+1}{x^2+x+6} \quad (I = \mathbb{R})$	
$r(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}{x^2} \quad (I = \mathbb{R}_+^*)$	
$s(x) = \dfrac{1}{\sqrt{4-x}} \quad (I = \left]-\infty, 4\right[)$	
$t(x) = \ln x + \dfrac{1}{x} \quad (I = \mathbb{R}_+^*)$	
$u(x) = x\sqrt{x^2+1} \quad (I = \mathbb{R})$	
$v(x) = \dfrac{\ln x}{x} \quad (I = \mathbb{R}_+^*)$	
$w(x) = \dfrac{\cos x}{\sqrt{2+\sin x}} \quad (I = \mathbb{R})$	

Réponse de l'exercice 3 .

On pose $g(x) = \ln(1+x) - x + \dfrac{x^2}{2}$ définie sur $\mathbb{R}^+$ (puisque l'on veut démontrer l'inégalité sur $\mathbb{R}^+$.)

On obtient $g'(x) = \dfrac{1}{x+1} - (1-x) = \dfrac{x^2}{x+1} > 0$. D'où le tableau de variation :

x	0		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	
$g(x)$	0	$\nearrow$	

Donc

$$\forall x \in \mathbb{R},\ g(x) \geq 0 \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R},\ \ln(1+x) \geq x - \frac{x^2}{2}$$

Réponse de l'exercice 4 .

La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$. On a $f'(x) = 3x^2 - 6x + 1$ définie sur $\mathbb{R}^+$. Donc $\Delta = 24$, on a $x_1 = \dfrac{3-\sqrt{6}}{3}$ et $x_1 = \dfrac{3+\sqrt{6}}{3}$. Du signe de "$a$" à l'extérieur des racines donc :

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$f(x_1)$	$\searrow$	$f(x_2)$	$\nearrow$	$+\infty$

La fonction g est définie sur $\mathbb{R}^*$. On a $g'(x) = \dfrac{1}{x^3}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$ définie sur $\mathbb{R}^*$. Comme $\mathrm{e}^{\frac{1}{x}} > 0$, la fonction g' est du signe de $\dfrac{1}{x^3}$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	‖	$+$	
$g(x)$	1	$\searrow$	0 ‖ $-\infty$	$\nearrow$	1

- $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x} = 0$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(1 - \dfrac{1}{x}\right) = 1$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^{\frac{1}{x}} = 1$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = 1$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = 0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(1 - \dfrac{1}{x}\right) = 1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{\frac{1}{x}} = 1$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 1$
- $\lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{1}{x} = +\infty$ donc $\lim\limits_{x\to0^+} \left(1 - \dfrac{1}{x}\right) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to0^+} \mathrm{e}^{\frac{1}{x}} = +\infty$ donc $\lim\limits_{x\to0^+} g(x) = -\infty$
- On pose $X = \dfrac{1}{x}$. On a $\left(1 - \dfrac{1}{x}\right)\mathrm{e}^{\frac{1}{x}} = (1+X)\mathrm{e}^X$. $\lim\limits_{x\to0^-} g(x) = \lim\limits_{X\to-\infty}(1+X)\mathrm{e}^X \underbrace{=}_{\text{croissance comparée}} 0$

La fonction h est définie sur $\mathbb{R}$, puisque le polynôme $x^2 + x + 1 > 0$ (En effet $\Delta < 0$ donc du signe de "a") On a $h'(x) = \dfrac{2x+1}{\sqrt{x^2+x+1}}$ définie sur $\mathbb{R}$. Comme $\sqrt{x^2+x+1} > 0$, la fonction h' est du signe de $2x+1$.

x	$-\infty$		$\frac{-1}{2}$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\nearrow$	1