Feuille d'exercices 14 : matrices.

Exercice 1

Indiquer et effectuer tous les produits possibles entre deux des matrices suivantes.

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$; $C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$; $D = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$; $E = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 5 \\ -1 & -1 & -3 \end{pmatrix}$

Exercice 2

Résoudre l'équation $X^2 - 2X = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}$ d'inconnue $X \in M_2(\mathbb{R})$.

Exercice 3

Déterminer l'ensemble des matrices $M \in M_2(\mathbb{R})$ qui commutent avec $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

Exercice 4

On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 5

On note $A = I_2 + B$, où $B = \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ 4 & -4 \end{pmatrix}$. Calculer B^2. En déduire A^n pour $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 6

On considère la matrice A de $M_3(\mathbb{R})$ définie par

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

En écrivant $A = 2I_3 + B$, où B est une matrice à préciser, calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 7

On pose $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

1) Montrer que A est inversible et calculer A^{-1}.
2) Exprimer A^2 en fonction de A et I_2.
3) À l'aide de cette relation, retrouver le résultat de la question 1).

Exercice 8

Inverser (lorsque cela est possible) les matrices suivantes :

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}.$$

Exercice 9

Soit A la matrice de $M_3(\mathbb{R})$ définie par :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

1) Calculer $A^2 + 2A - 3I_3$. En déduire que A est inversible et calculer A^{-1}.
2) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe des réels a_n et b_n tels que $A^n = a_n A + b_n I_3$.
3) Déterminer le terme général des suites (a_n) et (b_n).

Exercice 10

Pour tout $m \in \mathbb{R}$, on pose

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & m \\ 3 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Pour quelles valeurs du paramètre m la matrice A est-elle inversible ?

Exercice 11

On considère la matrice A de $M_3(\mathbb{R})$ définie par $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

1) La matrice A est-elle inversible ?
2) Calculer A^3 et retrouver le résultat de la question précédente.

Exercice 12

Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on pose $R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$.

1) En utilisant le déterminant, montrer que, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $R(\theta)$ est inversible et donner $[R(\theta)]^{-1}$.
2) Soit θ et θ' deux réels. Calculer $R(\theta)R(\theta')$.
3) Calculer $R(0)$.
4) À l'aide des questions 2) et 3), retrouver le résultat de la question 1).

Exercice 13

Déterminer le rang des matrices suivantes :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 5 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} ; \qquad \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 0 \\ -3 & 1 & 0 & 2 \\ -4 & 5 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Exercice 14

Déterminer, selon les valeurs de $\lambda \in \mathbb{R}$ le rang de la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{pmatrix}.$$

Exercice 15

Soit A et B deux matrices symétriques de $M_n(\mathbb{K})$.
À quelle condition (nécessaire et suffisante) sur A et B la matrice AB est-elle symétrique ?

Exercice 16

On note $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

1) Vérifier que P est inversible et donner son inverse.
2) Calculer la matrice $D = P^{-1}AP$.
3) Calculer D^n puis en déduire A^n, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 17

On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -4 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1) Montrer que P est inversible et calculer P^{-1}.
2) Calculer la matrice $D = P^{-1}AP$.
3) Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}$, D^n.
4) En déduire, pour $n \in \mathbb{N}$, l'expression de A^n.

Exercice 18

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

1) Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2) On considère les suites (u_n) et (v_n) définies par $u_0, v_0 \in \mathbb{R}$ et les relations de récurrence :

$$\begin{cases} u_{n+1} = u_n - v_n \\ v_{n+1} = -u_n + v_n \end{cases}.$$

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$. Établir une relation entre X_{n+1}, A et X_n.
3) En déduire, pour $n \in \mathbb{N}$, l'expression de u_n et v_n en fonction de u_0, v_0 et n.

Exercice 19

Soit $U = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 5 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

1. Calculer U^2 et U^3.
2. Exprimer U^3 sous la forme $aU^2 + bU + cI_3$ avec $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$.
3. En déduire que U est inversible et déterminer U^{-1}.

Exercice 20

Résoudre dans $M_2(\mathbb{R})$ $N^2 = 0_{2,2}$.

Exercice 21

Soit N une matrice nilpotente (cf exercice précédent) et p tel que $N^p = 0$. Soit $m \in \mathbb{N}$. Exprimer la matrice $(I_n + N)^m$ en fonction de $I_n, N, N^2, \cdots N^{p-1}$.

Calculer A^{10} où $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 22

Pour chacune des matrices suivantes déterminer son rang et les solutions de l'équation $AX = 0_{4,1}$. Dans le cas où elles sont inversibles calculer leur inverse

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 4 & 4 & 4 & 0 & 4 \\ 2 & 3 & 3 & 1 & 3 \\ 4 & 4 & 5 & 1 & 5 \\ 4 & 4 & 5 & 1 & 5 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 6 & 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 8 & 16 & 68 & 76 \\ 2 & 4 & 16 & 18 \\ 2 & 5 & 20 & 23 \\ 8 & 16 & 69 & 77 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 2 & 4 & 13 & 9 & 13 \\ 0 & 2 & 6 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 14 & 10 & 14 \end{pmatrix}$$

Exercice 23

Soit $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

1. Calculer M^2, M^3 et M^4.
2. Calculer le produit $(I_3 + M + M^2)(I_3 - M)$.
3. En déduire que $I_3 - M$ est inversible et déterminer son inverse.
4. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Déterminer trois suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on ait
$$(xI_3 + yM)^n = a_n I_3 + b_n M + c_n M^2$$
5. On considère les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par récurrence par
$$\begin{cases} u_{n+1} = 2u_n + v_n \\ v_{n+1} = 2v_n + w_n \\ w_{n+1} = 2w_n \\ u_0 = 1,\ v_0 = 0,\ w_0 = -1 \end{cases}$$
Exprimer u_n, v_n et w_n en fonction de n.

Exercice 24

Discuter en fonction des paramètres $(m, a) \in \mathbb{C}^2$ du rang des matrices suivantes

$$\begin{pmatrix} m & 1-m & 1+m \\ 0 & 1-m & m \\ 0 & 0 & m \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} m & 1-m \\ 1-m & 4m \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & a & m \\ a & 1 & m \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} a-m & a-1 \\ a+1 & a-2-m \end{pmatrix}$$

Réponse de l'exercice 19

1. On a

$$U^2 = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 0 \\ 0 & 2 & 5 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad U^3 = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 10 \\ 2 & 5 & 4 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

2. On a $U^3 = 2U + 5I_3$
3. De la question précédente on déduit que $U(U^2 - 2I_3) = 5I_3$. D'où

$$U\left(\frac{U^2 - 2I_3}{5}\right) = I_3$$

   Ainsi U est inversible et $U^{-1} = \dfrac{U^2 - 2I_3}{5}$.

Réponse de l'exercice 20

Posons

$$N = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

On a alors

$$N^2 = \begin{pmatrix} b \times c + a^2 & b \times d + a \times b \\ c \times d + a \times c & d^2 + b \times c \end{pmatrix} = 0_{2,2}$$

On en tire le système suivant

$$\begin{cases} bc + a^2 = 0 \\ bd + ab = 0 \\ cd + ac = 0 \\ d^2 + bc = 0 \end{cases}$$

D'où

$$\begin{cases} a^2 = d^2 = -bc \\ b(a + d) = 0 \\ c(a + d) = 0 \end{cases}$$

On a alors trois cas possibles :

— $a = d \neq 0$ et alors on obtient $b = c = 0$ et $a^2 = 0$, ce qui est absurde.

— $a = d \neq 0$, on a alors $b \times c = 0$ d'où les deux formes de matrices suivantes

$$N_1 = \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad b \in \mathbb{R} \quad \text{ et } N_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix} \quad c \in \mathbb{R}$$

— $a = -d \neq 0$,on en tire $b \times c = -a^2 \neq 0$ et donc $b \neq 0$. On obtient alors la forme suivante de matrice

$$N_3 = \begin{pmatrix} a & b \\ \dfrac{-a^2}{b} & -a \end{pmatrix} \quad (a, b) \in \mathbb{R}^2$$

En conclusion les matrices N telles que $N^2 = 0_{2,2}$ (on dira que N est nilpotente) sont de l'une des trois formes suivantes

$$N_1 = \begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad N_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix} \quad N_3 = \begin{pmatrix} a & b \\ \frac{-a^2}{b} & -a \end{pmatrix} \qquad (a,b,c) \in \mathbb{R}^3$$

Réponse de l'exercice 21

I_n et N commutent, on peut donc utiliser la formule du binôme de Newton. On sait que $N^p = 0$ d'où, pour tout $k \geqslant p$, $N^k = 0$. On a alors

$$(I_n + N)^m = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} N^k I_n^{m-k} = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} N^k = \sum_{k=0}^{\min(m,p-1)} \binom{m}{k} N^k$$

Dans notre exemple on a $A = I_3 + N$ où $N = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. On a

$$N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad N^3 = 0$$

D'où

$$A^{10} = (I_3 + N)^{10} = \binom{10}{0} N^0 + \binom{10}{1} N + \binom{10}{2} N^2 = \begin{pmatrix} 1 & 20 & -80 \\ 0 & 1 & -10 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Réponse de l'exercice 22

— Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

Pour s'épargner de refaire deux fois de suite les même calcul on va directement appliquer l'algorithme de Gauss-Jordan sur la matrice augmentée.

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$L_4 \leftarrow L_4 - L_1$
$L_3 \leftarrow L_3 - L_1$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$L_4 \leftarrow L_4 - L_3$

$L_4 \leftarrow \dfrac{1}{2}L_4$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -\dfrac{1}{2} & \dfrac{1}{2} \end{array}\right)$$

On voit dès à présent que A est de rang 4 et est donc bien inversible.
$L_2 \leftarrow L_2 - 2L_4$
$L_2 \leftarrow L_2 - L_3$
$L_1 \leftarrow L_1 - L_4$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & - \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right)$$

L'inverse de A est donc $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 1 & 1 & 0 & - \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

L'équation $AX = 0_{4,1}$ est, comme A est inversible, équivalente à $X = A^{-1}0_{4,1}$ et admet donc comme unique solution $0_{4,1}$.

— Soit $B = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 4 & 0 & 4 \\ 2 & 3 & 3 & 1 & 3 \\ 4 & 4 & 5 & 1 & 5 \\ 4 & 4 & 5 & 1 & 5 \end{pmatrix}$

B n'est pas une matrice carrée, il est donc impossible que B soit inversible.
On va appliquer l'algorithme du pivot de Gauss pour simultanément trouver le rang de B et résoudre l'équation $BX = 0$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 4 & 4 & 4 & 0 & 4 & 0 \\ 2 & 3 & 3 & 1 & 3 & 0 \\ 4 & 4 & 5 & 1 & 5 & 0 \\ 4 & 4 & 5 & 1 & 5 & 0 \end{array}\right)$$

$L_4 \leftarrow L_4 - L_3$
$L_1 \leftarrow \dfrac{1}{4}L_1$
$L_3 \leftarrow L_3 - 4L_1$
$L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ . & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

On peut maintenant lire le rang de B, B est de rang 3.
$L_2 \leftarrow L_2 - L_3$
$L_1 \leftarrow L_1 - L_3$

$L_1 \leftarrow L_1 + L_2$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ . & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

On obtient alors l'écriture matricielle du système

$$\begin{cases} x_1 - x_4 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_3 + x_4 + x_5 = 0 \end{cases}$$

qui a pour ensemble de solutions

$$\mathcal{S} = \left(\{(x_4, 0, -x_4 - x_5, x_4, x_5)\ ,\ (x_4, x_5) \in \mathbb{R}^2\}\right)$$

— Soit $C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 6 & 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

On applique l'algorithme de Gauss-Jordan

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 2 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 6 & 2 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$L_1 \leftarrow L_1 - L_2$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 6 & 2 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$L_2 \leftarrow L_2 - L_1$
$L_4 \leftarrow L_4 - 6L_1$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 4 & -6 & 6 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$L_4 \leftarrow L_4 - 2L_2$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -4 & 10 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

On voit que C est de rang 4 et est donc inversible
$L_4 \leftarrow \dfrac{1}{2} L_4$
$L_3 \leftarrow L_3 - L_4$

$L_2 \leftarrow L_2 - L_4$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -3 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & -5 & 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 5 & 0 & \frac{1}{2} \end{array}\right)$$

C est donc inversible d'inverse $C^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 2 & -5 & 1 & -\frac{1}{2} \\ -2 & 5 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

L'équation $CX = 0_{4,1}$ est, comme C est inversible, équivalente à $X = C^{-1}0_{4,1}$ et admet donc comme unique solution $0_{4,1}$.

— Soit $D = \begin{pmatrix} 8 & 16 & 68 & 76 \\ 2 & 4 & 16 & 18 \\ 2 & 5 & 20 & 23 \\ 8 & 16 & 69 & 77 \end{pmatrix}$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 8 & 16 & 68 & 76 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 16 & 18 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 20 & 23 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 8 & 16 & 69 & 77 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$L_1 \leftarrow \dfrac{1}{8}L_1$
$L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1$
$L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1$
$L_4 \leftarrow L_4 - 8L_1$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & \frac{17}{2} & \frac{19}{2} & \frac{1}{8} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -\frac{1}{4} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 4 & -\frac{1}{4} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$L_2 \leftrightarrow L_3$
$L_4 \leftarrow L_4 + L_3$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & \frac{17}{2} & \frac{19}{2} & \frac{1}{8} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 4 & -\frac{1}{4} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -\frac{1}{4} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{5}{4} & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

On voit alors que D est de rang 3 et n'est donc pas inversible.
Pour résoudre $DX = 0_{4,1}$ on applique l'algorithme du pivot de Gauss en reprenant les mêmes opérations, on aboutit alors à la formulation matricielle suivante

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & \frac{17}{2} & \frac{19}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$L_3 \leftarrow -L_3$
$L_2 \leftarrow L_2 - 3L_3$

$L_1 \leftarrow L_1 - \frac{17}{2}L_3$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

On obtient alors l'écriture matricielle du système

$$\begin{cases} x_1 - x_4 = 0 \\ x_2 + x_4 = 0 \\ x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

qui a pour ensemble de solutions

$$\mathcal{S} = \{(x_4, -x_4, -x_4, x_4)\ ,\ x_4 \in \mathbb{R}\}$$

— Soit $E = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 13 & 9 & 13 \\ 0 & 2 & 6 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 14 & 10 & 14 \end{pmatrix}$

E n'est pas une matrice carrée, il est donc impossible que E soit inversible. On utilise la méthode du pivot de Gauss pour trouver le rang de E et résoudre $EX = 0_{4,1}$.

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & 4 & 13 & 9 & 13 & 0 \\ 0 & 2 & 6 & 4 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 14 & 10 & 14 & 0 \end{array}\right)$$

$L_4 \leftarrow L_4 - L_1$
$L_4 \leftarrow L_4 - L_3$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & 4 & 13 & 9 & 13 & 0 \\ 0 & 2 & 6 & 4 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

E est ainsi de rang 3.
$L_2 \leftarrow L_2 - 6L_3$
$L_1 \leftarrow L_1 - 13L_3$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & 4 & 0 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$L_1 \leftarrow L_1 - 2L_2$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

On obtient l'écriture matricielle du système

$$\begin{cases} 2x_1 = 0 \\ 2x_2 - 2x_4 = 0 \\ x_3 + x_4 + x_5 = 0 \end{cases}$$

qui a pour ensemble de solution

$$S = \{(0, x_4, -x_4 - x_5, x_4, x_5)\ ,\ (x_4, x_5) \in \mathbb{R}^2\}$$

Réponse de l'exercice 23

1. On a
$$M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad M^3 = 0_{3,3} \qquad M^4 = 0_{3,3}$$

2. On a
$$(I_3 + M + M^2)(I_3 - M) = I_3 - M + M - M^2 + M^2 - M^3 = I_3 - M^3 = I_3$$

3. Puisqu'il existe une matrice B telle que $(I_3 - M)B = I_3$ alors $I_3 - M$ est inversible et son inverse est $B = I_3 + M + M^2$.

4. Soit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$et $n \in \mathbb{N}$. Pour $n = 0$ on a $(xI_3+yM)^0 = I_3$, pour $n = 1$ on a $(xI_3+yM)^1 = xI_3+yM$ xI_3 et yM commutent. Pour $hn \geqslant 2$ on peut donc utiliser le binôme de Newton pour développer $(xI_3 + yM)^n$. On a alors
$$\begin{aligned} (xI_3 + yM)^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (yM)^k (xI_3)^{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^{2} \binom{n}{k} (yM)^k (xI_3)^{n-k} \text{en effet, si } k \geqslant 3 \text{ on a } M^k = 0 \\ &= \binom{n}{0} x^n I_3 + \binom{n}{1} x^{n-1} yM + \binom{n}{2} x^{n-2} y^2 M^2 \\ &= x^n I_3 + n x^{n-1} yM + \frac{n(n-1)}{2} x^{n-2} y^2 M^2 \end{aligned}$$

5. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $U_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$. On a
$$U_{n+1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} U_n = (2I_3 + M)U_n$$
Par une récurrence simple (cf. exercice précédent) on a alors $U_n = (2I_3 + M)^n U_0$

Or

$$(2I_3+M)^n = 2^n I_3 + n2^{n-1}M + \frac{n(n-1)}{2}2^{n-2}M^2 = \begin{pmatrix} 2^n & n2^{n-1} & n(n-1)2^{n-3} \\ 0 & 2^n & n2^{n-1} \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$$

Ainsi

$$U_n = \begin{pmatrix} 2^n & n2^{n-1} & n(n-1)2^{n-3} \\ 0 & 2^n & n2^{n-1} \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^n - (n-1)\,n2^{n-3} \\ -n2^{n-1} \\ -2^n \end{pmatrix}$$

D'où, pour $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\begin{cases} u_n = 2^n - (n-1)\,n2^{n-3} \\ v_n = -n2^{n-1} \\ w_n = -2^n \end{cases}$$

Réponse de l'exercice 24

- La matrice $A = \begin{pmatrix} m & 1-m & 1+m \\ 0 & 1-m & m \\ 0 & 0 & m \end{pmatrix}$ est déjà sous forme triangulaire. Si $m \notin \{0,1\}$ alors A est de rang 3.
  - Si $m=0$ alors $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. En faisant $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$ on obtient $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ qui est de rang 2. Ainsi A est de rang 2 si $m=0$.
  - Si $m=1$ alors $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ En faisant $L_3 \leftarrow L_3 - L_2$ on obtient $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ qui est de rang 2. Ainsi A est de rang 2 si $m=1$.
- Soit $B = \begin{pmatrix} m & 1-m \\ 1-m & 4m \end{pmatrix}$. On calcule le rang de B via un pivot de Gauss.
  $L_1 \leftarrow L_1 + L_2$

  $$\begin{pmatrix} 1 & 1+3m \\ 1-m & 4m \end{pmatrix}$$

  $L_2 \leftarrow L_2 - (1-m)L_1$

  $$\begin{pmatrix} 1 & 1+3m \\ 0 & -1+2m+3m^2(1+3m)(1-m) \end{pmatrix}$$

  On voit alors que B va être de rang 1 si $-1+2m+3m^2=0$, c'est-à-dire si $m \in \left\{-1, \frac{1}{3}\right\}$ et de rang 2 sinon.
- Soit $C = \begin{pmatrix} 1 & a & m \\ a & 1 & m \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$
  $L_3 \leftrightarrow L_1$

  $$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & m \\ a & 1 & m \end{pmatrix}$$

$L_2 \leftarrow L_2 - L_1$
$L_3 \leftarrow L_3 - aL_1$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & a-1 & m-1 \\ 0 & 1-a & m-a \end{pmatrix}$$

$L_3 \leftarrow L_3 + L_2$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & a-1 & m-1 \\ 0 & 0 & 2m-a-1 \end{pmatrix}$$

Ainsi, si $a \neq 1$ et $m \neq \dfrac{a+1}{2}$ alors C est de rang 3. Si $a \neq 1$ et $m = \dfrac{a+1}{2}$ alors C est de rang 2. Enfin si $a = 1$ alors on obtient $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & m-1 \\ 0 & 0 & 2(m-1) \end{pmatrix}$ qui est de rang 2 si $m \neq 1$ et de rang 1 si $m = 1$.

- Soit $D = \begin{pmatrix} a-m & a-1 \\ a+1 & a-2-m \end{pmatrix}$

  Plutôt que d'appliquer une méthode du pivot de Gauss (ce qui marcherait) on va changer de méthode en utilisant divers résultats du cours.

  D est une matrice 2×2, son rang est alors $0, 1$ ou 2

  — D est de rang 0 si et seulement si $D = 0$ ce qui est impossible

  — D est de rang 2 si et seulement si elle est inversible, c'est-à-dire si et seulement si $\det(D) \neq 0$. On a

  $$\det(D) = (a-m)(a-2-m) - (a+1)(a-1) = m^2 - 2am + 2m - 2a + 1 = (m+1)(m-2a+1)$$

  — D est de rang 1 dans les autre cas.

  Ainsi D est de rang 1 si $m = -1$ ou si $m \neq -1$ et $a = \dfrac{m+1}{2}$ et de rang 2 si $m \neq -1$ et $a \neq \dfrac{m+1}{2}$.