Feuille d'exercices 18 : probabilités

Exercice 1. Soit A, B et C trois événements associés à une expérience aléatoire.
Exprimer à l'aide de A, B, C et des opérations sur les ensembles les évènements suivants :
a) les trois événements se produisent ;
b) aucun des événements ne se produit ;
c) seul l'évènement A se produit ;
d) A et B se produisent mais pas C ;
e) deux événements exactement se produisent.

Exercice 2. On lance deux fois un dé non pipé. Expliciter les événements suivants et calculer leur probabilité :

A : « le premier lancer a donné 1 » ;
B : « le double du premier lancer a été inférieur ou égal au second » ;
C : « la somme des deux dés est 4 » ;
D : $B \cap C$;
E : « on a au moins un six ».

Exercice 3. L'affirmation suivante est-elle vraie : « on a deux fois plus de chances d'avoir au moins un 6 en lançant deux dés que d'avoir un 6 en lançant un seul dé » ?

Exercice 4. Dans une urne qui contient neuf boules numérotées de 1 à 9, on tire une boule, puis une seconde avec remise de la première.
a) Préciser l'univers Ω associé à l'expérience et son cardinal.
b) Calculer la probabilité d'obtenir deux boules de même parité.
c) Reprendre les questions précédentes lorsque le tirage a lieu sans remise de la première boule.

Exercice 5. Dans un jeu de 52 cartes, on a remplacé une carte autre que le roi de cœur par un deuxième roi de cœur. Une personne tire simultanément 5 cartes du jeu. Quelle est la probabilité qu'elle s'aperçoive de la supercherie ?

Exercice 6. On pioche successivement 4 cartes d'un jeu de 32 cartes. Calculer la probabilité d'obtenir 2 trèfles et 2 coeurs dans cet ordre lorsque la pioche est :
a) sans remise ;
b) avec remise.

Exercice 7. On lance un dé pipé. On suppose que, la probabilité d'obtenir $k \in [\![1, 6]\!]$ est proportionnelle à k. Déterminer la probabilité d'obtenir un nombre pair.

Exercice 8. Dans un jeu de 32 cartes, on tire successivement 5 cartes avec remise.
Calculer la probabilité qu'un premier as apparaisse
a) à la première pioche ;
b) à la troisième pioche ;
c) jamais.

Exercice 9. Une urne contient n boules numérotées de 1 à n. On les tire toutes successivement.
a) Calculer la probabilité d'avoir tiré les boules 1, 2 et 3 dans cet ordre et à la suite.
b) Calculer la probabilité d'avoir tiré les boules 1, 2 et 3 à la suite mais pas forcément dans cet ordre.
c) Calculer la probabilité d'avoir tiré les boules 1, 2 et 3 dans cet ordre, pas forcément à la suite.

Exercice 10. Dans une loterie, il y a 30 billets, dont n sont gagnants. On suppose que tous les billets ont la même probabilité d'être achetés.
a) On achète deux billets au hasard. Calculer la probabilité de ne pas gagner.
b) Combien doit-il y avoir de billets gagnants au minimum pour que la probabilité de gagner en achetant deux billets soit supérieure à 90% ?

Exercice 11. Un tiroir contient 10 paires de chaussettes différentes. On prend quatre chaussettes au hasard. Quelle est la probabilité d'obtenir
a) deux paires ?
b) au moins une paire ?
c) exactement une paire ?

Exercice 12. Paradoxe des anniversaires.
On considère une classe de n élèves. Pour simplifier, on supposera qu'une année compte 365 jours.
a) Calculer la probabilité pour que deux élèves au moins aient leur anniversaire le même jour.
b) Calculer cette probabilité lorsque $n = 22$, $n = 23$, puis donner une valeur approchée.
c) Calculer la probabilité pour qu'au moins deux élèves de la BCPST1 du lycée Louis Barthou aient leur anniversaire le même jour. Donner ensuite une valeur approchée.

Exercice 13. Un sac contient trois pièces : une avec deux piles, une avec deux faces et la troisième avec pile et face. On tire une pièce au hasard et on la pose sur la table. La face visible est pile. Quelle est la probabilité pour que l'autre soit également pile ?

Exercice 14. Une urne contient 12 boules dont 5 noires, 3 blanches et 4 rouges.
On tire simultanément 4 boules. On considère les événements A : « obtenir deux boules blanches » et B : « obtenir deux boules rouges ». Calculer les probabilités conditionnelles $P_A(B)$ et $P_B(A)$.

Exercice 15. Une urne contient quatre boules blanches et cinq boules noires. On pioche au hasard, successivement et sans remise 4 boules dans cette urne.
a) En appliquant la formule des probabilités composées, calculer la probabilité d'obtenir 2 boules blanches puis 2 boules noires dans cet ordre.
b) Retrouver ce résultat sans utiliser cette formule.

Exercice 16. On lance n fois une pièce équilibrée, les lancers sont mutuellement indépendants. On gagne si l'on obtient deux fois de suite le même résultat. Quelle est la probabilité de gagner ?

Exercice 17. Un archer tire sur une cible située à 20 m et une cible située à 50 m. Il effectue trois tirs en changeant de cible à chaque fois. La probabilité d'atteindre la cible à 20 m (resp. 50 m) est p (resp. q) avec $q < p$. On suppose que les tirs sont indépendants. L'archer gagne le jeu s'il atteint deux cibles consécutivement.
a) Calculer la probabilité de gagner en commençant par la cible située à 20 m (resp. à 50 m).
b) Par quelle cible l'archer a-t-il intérêt à commencer ? Interpréter ce résultat.

Exercice 18. On considère deux urnes identiques. La première contient trois boules blanches et sept boules noires, la deuxième cinq boules blanches et trois boules noires. On choisit au hasard une des deux urnes et on tire au hasard une boule dans cette urne. La boule obtenue est blanche. Calculer la probabilité qu'elle provienne de la première urne.

Exercice 19. On considère 4 urnes qui contiennent des boules reparties de la manière suivante :

- la première urne contient 3 boules blanches, 2 boules noires et 3 boules rouges ;
- la deuxième urne contient 4 boules blanches, 3 boules noires et 1 boule rouge ;
- la troisième urne contient 2 boules blanches, 1 boule noire et 1 boule rouge ;
- la quatrième urne contient 1 boule blanche, 6 boules noires et 2 boules rouges.

On choisit au hasard une urne et on tire au hasard une boule dans celle-ci.
a) Déterminer la probabilité que cette boule ne soit pas rouge.
b) Si la boule est noire, quelle est la probabilité qu'elle provienne de la troisième urne ?

Exercice 20. Un laboratoire fabrique des alcootests. Les essais montrent que :
- 2% des personnes contrôlées sont en état d'ébriété ;
- dans 98% des cas, l'alcootest donne un résultat positif lorsque la personne est en état d'ébriété ;
- dans 96% des cas, l'alcootest donne un résultat négatif lorsque la personne n'est pas en état d'ébriété.

a) On essaye l'alcootest sur une personne et le résultat est positif.
Quelle est la probabilité qu'elle soit en état d'ébriété ?
b) On essaye l'alcootest sur une personne et le résultat est négatif.
Quelle est la probabilité qu'elle ne soit pas en état d'ébriété ?
c) Déterminer la probabilité que l'alcootest donne un résultat incorrect.

Exercice 21. Un fumeur veut essayer d'arrêter. S'il ne fume pas un jour donné, la probabilité qu'il ne fume pas le lendemain est $\frac{3}{10}$. En revanche, s'il succombe ce jour-là, la probabilité qu'il ne fume pas le lendemain est $\frac{9}{10}$. Quelle est la probabilité qu'il ne fume pas le n-ième jour ?

Exercice 22. On considère n sacs $S_1, \cdots, S_n$. Pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, le sac S_k contient k jetons blancs et $(n+1-k)$ jetons rouges. On suppose que la probabilité de choisir le sac S_k est proportionnelle à k ($k \in [\![1, n]\!]$). Une fois le sac choisi, on extrait au hasard un jeton de celui-ci.
Le jeton tiré est blanc. Déterminer la probabilité qu'il provienne du sac S_k ($k \in [\![1, n]\!]$).

Exercice 23. Un pigeon se pose chaque jour sur l'un des deux bancs A et B. Le premier jour, il se pose sur le banc A. Chaque jour, il y a une probabilité $p \in]0, 1[$ qu'il se pose sur le même banc que la veille. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère les événements

A_n : « le pigeon se pose sur le banc A le n-ème jour » ,

B_n : « le pigeon se pose sur le banc B n-ème jour » ;

et on pose $a_n = P(A_n)$, $b_n = P(B_n)$.
a) Exprimer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, a_{n+1} en fonction de a_n.
b) En déduire l'expression de a_n en fonction de n.
c) Donner alors l'expression de b_n en fonction de n.
d) Déterminer la limite des suites (a_n) et (b_n).
e) Interpréter ce résultat.

Exercice 24. On considère la matrice M définie par :

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Afin d'étudier les capacités d'adaptation des souris, des étudiants de BCPST mettent au point le protocole suivant. Ils placent une souris dans une boîte comportant trois sorties A, B et C. Seule la dernière mène à un morceau de gruyère. Lorsque la souris a choisi une sortie, les étudiants la remettent au centre de la boîte et répètent l'expérience. Ils observent les résultats suivants :

- si la souris choisit la sortie A, elle sort la fois suivante en B ou C de manière équiprobable ;
- si elle choisit la sortie B, elle sort la fois suivante en A ou C de manière équiprobable ;
- si elle choisit la sortie C, elle la choisit systématiquement la fois suivante.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère les événements suivants

A_n : « la souris choisit l'issue A lors de la n-ième expérience » ;
B_n : « la souris choisit l'issue B lors de la n-ième expérience » ;
C_n : « la souris choisit l'issue C lors de la n-ième expérience ».

Enfin, on note $a_n = P(A_n)$, $b_n = P(B_n)$, $c_n = P(C_n)$ et :

$$X_n = \begin{bmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{bmatrix}.$$

Lors de la première expérience, la souris choisit la sortie A.

1) Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad M^n = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1+(-1)^n & 1-(-1)^n & 0 \\ 1-(-1)^n & 1+(-1)^n & 0 \\ 2^{n+1}-2 & 2^{n+1}-2 & 2^{n+1} \end{bmatrix}.$$

2) Calculer a_1, b_1 et c_1.
3) Exprimer a_{n+1}, b_{n+1} et c_{n+1} en fonction de a_n, b_n et c_n.
4) En déduire une relation matricielle entre M, X_n et X_{n+1}.
5) Déterminer alors l'expression de X_n en fonction de n.
6) En déduire l'expression de a_n et b_n et c_n en fonction de n.
7) Calculer la limite des suites (a_n), (b_n) et (c_n).
8) Interpréter le résultat obtenu à la question précédente.