
Feuille d'exercices 10 : dénombrement

Exercice 1

On considère l'ensemble $E = \llbracket 1, 10 \rrbracket$. Donner :

- a) le nombre de 3-listes de E ;
 - b) le nombre de 3-listes sans répétition de E ;
 - c) le nombre de parties de E à 3 éléments ;
 - d) le nombre de permutations de E ;
 - e) le nombre de sous-ensembles de E .
-

Exercice 2

Soit E l'ensemble des nombres à quatre chiffres ne comportant aucun 9. Calculer :

- a) le cardinal de E ;
 - b) le nombre d'éléments pairs de E ;
 - c) le nombre d'éléments de E qui ont quatre chiffres différents ;
 - d) le nombre d'éléments de E qui sont multiples de 5.
-

Exercice 3

Dans un lycée de 1 200 élèves, 652 pratiquent une activité sportive, 327 jouent d'un instrument de musique et 453 ne font ni sport, ni musique. Déterminer le nombre d'élèves à la fois sportifs et musiciens.

Exercice 4

Quel doit être le nombre minimum d'habitants dans un village pour être certain que deux personnes (au moins) possèdent les mêmes initiales ?

Exercice 5

On tire simultanément k boules d'une urne qui contient n boules blanches et une noire.

- a) Quel est le nombre total de tirages possibles ?
 - b) Combien y a-t-il de tirages sans la boule noire ?
 - c) Combien y a-t-il de tirages avec la boule noire ?
-

Exercice 6

Lors d'un repas de classe un jeudi soir, les élèves de BCPST1 du lycée Barthou trinquent. Combien entend-on de tintements de verres ?

Exercice 7

On souhaite ranger n dossiers numérotés de 1 à n dans n tiroirs également numérotés de 1 à n , en plaçant un dossier par tiroir. Déterminer :

- a) le nombre total de rangements possibles ;
 - b) le nombre de rangements tels que le dossier 1 soit dans le tiroir 1.
-

Exercice 8

Combien y-a-t-il d'anagrammes du mot « liste » ?

Du mot « PROCREEE » ? Du mot « intergouvernementalisations » ?

Exercice 9

Un ensemble E possède exactement 55 parties à deux éléments. Quel est le cardinal de cet ensemble ?

Exercice 10

Nombre de diagonales.

On considère un polygone convexe à n sommets ($n \geq 3$).

- Déterminer le nombre de diagonales de ce polygone.
- Quels sont les polygones qui possèdent autant de diagonales que de côtés ?

Exercice 11

On considère un quadrillage de n cases sur n cases.

Quel est le nombre total de carrés dans ce quadrillage ?

Exercice 12

Soit E un ensemble fini de cardinal n . Calculer la somme des cardinaux de toutes les parties de E .

Exercice 13

Loto Foot.

Au Loto Foot 7, le joueur remplit une grille dans laquelle il indique ses pronostics pour 7 matchs de football à venir. Pour chacun des matchs, il peut cocher une des 3 cases au choix :

- pour une victoire de l'équipe qui reçoit
- pour un match nul
- pour une victoire de l'équipe qui se déplace

- De combien de façons différentes un joueur peut-il remplir la grille ?
- Combien existe-t-il de grilles dans lesquelles tous les pronostics sont faux ?
- Combien existe-t-il de grilles avec exactement trois pronostics corrects ?
- Pour gagner, il faut avoir trouvé au moins 6 pronostics exacts. Quel est le nombre de grilles gagnantes ?

Exercice 14

Formule de Vandermonde.

Dans une classe de BCPST, il y a N_1 filles et N_2 garçons. On veut former une équipe de n joueurs de la classe pour un sport collectif.

- Combien peut-on former d'équipes différentes ?
- Pour $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ fixé, combien peut-on former d'équipes avec exactement k filles ?
- À l'aide des questions précédentes, démontrer la formule de Vandermonde :

$$\sum_{k=0}^n \binom{N_1}{k} \binom{N_2}{n-k} = \binom{N_1 + N_2}{n}.$$

- En déduire que l'on a :

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}.$$

Exercice 15

Un peu de poker.

Dans un jeu de 52 cartes, on choisit simultanément 5 cartes. Ces cinq cartes sont appelées une « main ».

- Déterminer le nombre total de mains.
- Déterminer le nombre de mains qui contiennent les 4 rois.
- Déterminer le nombre de mains qui contiennent exactement un roi.
- Déterminer le nombre de mains qui contiennent au moins un roi.
- Déterminer le nombre de mains qui contiennent un brelan de rois (trois rois exactement).
- Déterminer le nombre de mains qui contiennent le roi de cœur et au moins un trèfle.
- Déterminer le nombre de « couleurs » (cinq cartes de la même couleur).
- Déterminer le nombre de « full » (un brelan et une paire).