Feuille d'exercices 13 : équations différentielles et primitive changement de variable.

Exercice 1

Déterminer les primitives suivantes à l'aide du changement de variable précisé.

a) $\int \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$ avec $x = \sin t$.

b) $\int \frac{(\ln t)^2}{t}\,\mathrm{d}t$ avec $u = \ln t$.

c) $\int \frac{1-\sqrt{t}}{t}\,\mathrm{d}t$ avec $u = \sqrt{t}$.

d) $\int \frac{e^x}{1+e^x}\,\mathrm{d}x$ avec $u = e^x$.

e) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\int \frac{(\ln x)^n}{x}\,\mathrm{d}x$ avec $u \ln x$.

f) $\int \cos\left(\sqrt{x}\right)\,\mathrm{d}x$ avec $u = \sqrt{x}$ (avec IPP)

Exercice 2

Résoudre les équations différentielles suivantes :

a) $y' + y = 0$

b) $y' - 2y = 5$

c) $2y' + 3y = 7$

Exercice 3

Déterminer l'unique solution de l'équation différentielle $y' + 4y = 3$ vérifiant $y(0) = 2$.

Exercice 4

Résoudre les équations différentielles suivantes :

a) $y'' + 6y' + 9y = 0$

b) $y'' + y' - 2y = 3$

c) $y'' + 4y' + 5y = 1$

d) $y'' - y' = 3$

Exercice 5

Résoudre l'équation différentielle avec conditions initiales :

$$\begin{cases} y'' + 8y' + 15y = 2 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 4 \end{cases}$$

Exercice 6

Résoudre l'équation différentielle $y'' - y' + y = x^2 + 1$.
On recherchera une solution particulière sous la forme d'une fonction polynomiale.

Exercice 7

Circuit RL

Un circuit électrique est composé en série d'une bobine d'inductance L et d'une résistance R alimentées par un générateur de force électromotrice V. En notant $i(t)$ l'intensité du courant à l'instant t, i vérifie l'équation différentielle suivante :

$$\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \frac{R}{L}\,i = \frac{V}{L}.$$

1) Sachant que $i(0) = 0$, calculer $i(t)$ pour tout $t \geq 0$.

2) Représenter le graphe de i.

Exercice 8

Circuit LC

Un circuit électrique est composé en série d'un condensateur de capacité C et d'une bobine d'inductance L alimentés par un générateur de force électromotrice V. En notant $q(t)$ la charge du condensateur à l'instant t, q vérifie l'équation différentielle suivante :

$$\frac{\mathrm{d}^2q}{\mathrm{d}t^2} + \frac{1}{LC}\,q = \frac{V}{L}.$$

1) Sachant que $q(0) = 0$ et $\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}(0) = 0$, déterminer $q(t)$ pour tout $t \geq 0$.

2) Représenter le graphe de q.

Exercice 9

Solution générale de l'équation homogène.

On considère l'équation différentielle : $(\mathcal{E}_0)$: $y' - 3y = 0$. Où y est une fonction définie sur $\mathbb{R}$.

1. On considère la fonction m définie sur $\mathbb{R}$ par $m(t) = e^{3t}$. Montrer que m est solution de $y' - 3y = 0$
2. Soit $C \in \mathbb{R}$, montrer que la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(t) = Ce^{3t}$. Montrer que h est solution de l'équation $\mathcal{E}_0$.
3. On suppose maintenant que f est une fonction définie sur $\mathbb{R}$ solution de $\mathcal{E}_0$. On définie la fonction g sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ g(t) = e^{-3t}f(t)$$

   (a) Déterminer l'expression de $g'(t)$.

   (b) En déduire que g est constante. On notera $K \in \mathbb{R}$ cette constante.

   (c) En déduire que $\forall t \in R,\ f(t) = Ke^{3t}$

Exercice 10

.

On considère l'équation différentielle : $(\mathcal{E}_0)$: $y'' + 2y' - 3y = 0$

Où y est une fonction définie sur $\mathbb{R}$.

1. On considère la fonction m définie sur $\mathbb{R}$ par $m(t) = Ae^{t} + Be^{-3t}$ avec $(A, B) \in \mathbb{R}^2$.
   Montrer que m est solution de $\mathcal{E}_0$.
2. On suppose maintenant que u est une fonction définie sur $\mathbb{R}$ solution de $\mathcal{E}_0$. On définie la fonction v sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ v(t) = e^{-t}u(t)$$

   (a) Déterminer v'.

   (b) Montrer que v' est solution de l'équation différentielle :

$$y' + 4y = 0$$

   (c) On sait que les solutions de $y' + 4y = 0$ sont de la forme $t \mapsto Ce^{-4t}$ avec $C \in \mathbb{R}$. Montrer que v est de la forme $t \mapsto Ae^{-4t} + B$ avec $(A, B) \in \mathbb{R}^2$.

   (d) En déduire l'expression de u.