INP de Toulouse **Prépa**

Semestre 4 Math Méca

Suites et séries de fonctions

Travaux dirigés

Exercice 1. Étudier la convergence simple des suites de fonctions suivantes :

1. $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \dfrac{x}{n},$
2. $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}, \quad f_n(x) = x^n,$
3. $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \dfrac{x}{n+|x|}$, $n \in \mathbb{N}^*$
4. $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f_n(x) = n\sin(\dfrac{x}{n}),$
5. $f_n : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \dfrac{n}{1+nx},$
6. $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \dfrac{1}{1+x^2}\,\chi_{[-n,n]}(x)$, où $\chi_{[-n,n]}$ est la fonction indicatrice de $[-n,n]$,
7. $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \dfrac{1}{n}\chi_{[-n,n]}(x),$
8. $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} x^k.$

Correction :

1. Soit $x \in \mathbb{R}$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{x}{n} = 0$ donc (f_n) converge simplement vers la fonction nulle sur $\mathbb{R}$.
2. Soit $x \in [0,1[$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} x^n = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} 1^n = 1$ donc (f_n) converge simplement vers la fonction définie sur $[0,1[$ par :
$$\forall x \in [0,1],\ f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$
3. Soit $x \in \mathbb{R}$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{x}{n+|x|} = 0$ donc (f_n) converge simplement vers la fonction nulle sur $\mathbb{R}$.
4. Soit $x \in \mathbb{R}^*$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} x\dfrac{\sin\left(\frac{x}{n}\right)}{\frac{x}{n}} = x$ de plus $f_n(0) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ donc (f_n) converge simplement vers la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = x$$
5. Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{x}{1+nx} = \dfrac{1}{x}$ de plus $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(0) = \lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ donc (f_n) converge simplement sur $]0,+\infty[$ vers la fonction définie par :
$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \frac{1}{x}$$

6. Soit $x \in \mathbb{R}$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} f_n(x) = \lim\limits_{n \to +\infty} \frac{1}{1+x^2} \chi_{[-n,n]}(x) = \frac{1}{1+x^2}$
En effet, $\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant n_0,\ x \in [-n, n] \Rightarrow \chi_{[-n,n]}(x) = 1 \Rightarrow f_(x) = \frac{1}{1+x^2}$, donc (f_n) converge simplement sur $]0, +\infty[$ vers la fonction définie par :
$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \frac{1}{1+x^2}$$
7. Soit $x \in \mathbb{R}$, alors $\left|f_(x)\right| \leqslant \dfrac{1}{n}$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} f_n(x) = 0$, donc (f_n) converge simplement vers la fonction nulle sur $\mathbb{R}$.
8. Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, alors $f_n(x) = \dfrac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$ et $f_n(1) = n + 1$ donc :
$$\lim_{n \to +\infty} f_n(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{1-x} & \text{si } x \in]-1, 1[\\ \text{diverge sinon} \end{cases}$$
Donc (f_n) convergent simplement sur $]-1, 1[$ vers la fonction f défi nie par :

Exercice 2. On considère les fonctions $f_n : [a, b] \to \mathbb{R}$, croissantes. On suppose que la suite $(f_n)_n$ converge simplement vers f sur $[a, b]$. Montrer que f est croissante.

On suppose de plus que les f_n sont strictement croissantes. Est-ce que f est strictement croissante ?

Correction : On considère $x, y \in [a, b]$ avec $x < y$. Les suites réels $(f_n(x))$ et $(f_n(y)$ vérifies que :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ f_n(x) \leqslant f_n(y) \qquad \text{puisque } f_n \text{ croissante sur } [a, b]$$
Par passage à la limite, on obtient :
$$f(x) = \lim_{n \to +\infty} f_n(x) \leqslant f(y) = \lim_{n \to +\infty} f_n(y)$$
La fonction f est donc croissante.

Pour le cas où les fonctions sont strictement croissantes, voir Exercice 1 le 1. Les fonctions f_n sont strictement croissantes et elles tendent simplement vers la fonction nulle qui n'est pas strictement croissante.

Exercice 3. On pose $f_n(x) = \dfrac{\sin nx}{n}$. Montrer que la suite $(f_n)_{n \geq 1}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers la fonction nulle.

Correction : On a :
$$\|f_n\|_\infty = \frac{1}{n} \qquad \text{donc} \qquad \lim_{n \to +\infty} \|f_n\|_\infty = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0$$
Donc la suite $(f_n)_{n \geq 1}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers la fonction nulle.

Exercice 4. On pose $f_n(x) = \dfrac{x}{n}$. Montrer que la suite $(f_n)_n$ converge uniformément sur $[-R, R]$ pour tout $R > 0$. Montrer que cette suite ne converge pas uniformément sur $\mathbb{R}$.

Correction : On a :
$$\|f_n\|_{\infty,[-R,R]} = \frac{R}{n} \Rightarrow \lim_{n \to +\infty} \|f_n\|_{\infty,[-R,R]} = \lim_{n \to +\infty} \frac{R}{n} = 0$$
Donc la convergence est uniforme sur $[-R, R]$.

Comme sur $\forall n \in \mathbb{N},\ \sup\limits_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x)| = +\infty$, on peut dire que la suite de fonction (f_n) ne converge pas vers la fonction nulle uniformément.

Exercice 5. Pour $x \in [0,1[$, on pose $f_n(x) = x^n$. Montrer que pour tout $a \in [0,1[$, la suite $(f_n)_n$ converge uniformément sur $[0,a]$ vers la fonction nulle.

Calculer la limite de $f_n(1-\frac{1}{n})$ lorsque n tend vers $+\infty$. La suite $(f_n)_n$ converge-t-elle uniformément sur $[0,1[$?

Correction :

- On a :
$$\|f_n\|_{\infty,[0,a]} = a^n \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \|f_n\|_{\infty,[0,a]} = \lim_{n\to+\infty} a^n = 0 \quad \text{car } a \in [0,1[$$
Donc la convergence est uniforme sur $[0,a]$.
- On a $\|f_n\|_{\infty,[0,1[} = 1$ donc la convergence n'est pas uniforme sur $[0,1[$.
Sinon mais inutile ici :
On a $f_n(1-\frac{1}{n}) = \left(1-\dfrac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e}^{n\ln\,(1-\frac{1}{n})}$. Or $\ln\,\left(1-\frac{1}{n}\right) \sim \frac{-1}{n}$ donc $n\ln\,\left(1-\frac{1}{n}\right) \sim -1$.
Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1-\dfrac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e}^{-1}$
Donc
$\forall n \in \mathbb{N}, \|f_n\|_{\infty,[0,1[} \geqslant f_n(1-\frac{1}{n}) = \left(1-\dfrac{1}{n}\right)^n \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} \|f_n\|_{\infty,[0,1[} \geqslant \lim\limits_{n\to+\infty} \left(1-\dfrac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e}^{-1} \neq 0$
donc la suite (f_n) ne tend pas uniformément vers la fonction nulle.

Exercice 6. Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$. On pose $f_n(x) = f(x)\chi_{[0,n]}(x)$.

a. Montrer que la suite $(f_n)_n$ converge simplement vers f lorsque n tend vers $+\infty$.

b. On suppose que $f(x)$ tend vers zéro lorsque x tend vers $+\infty$. Montrer que la suite $(f_n)_n$ converge uniformément vers f sur $\mathbb{R}^+$.

Correction :

a Soit $x \in \mathbb{R}$ alors il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $x \leqslant n_0$.
Et donc $\forall n \in \mathbb{N},\ n \geqslant n_0 \Rightarrow f_n(x) = f(x)\underbrace{\chi_{[0,n]}(x)}_{=1} = f(x)$.
Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x)$. La suite de fonction (f_n) converge simplement vers f.

b On rappelle que par définition :
$$\lim_{n\to+\infty} \|f_n - f\|_\infty = 0 \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant n_0,\ \|f_n - f\|_\infty \leqslant \varepsilon$$
Soit donc $\varepsilon > 0$. Puisque $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$, on a $\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}^+, x \geqslant n_0 \Rightarrow\ |f(x)| < \varepsilon$.
Donc $\forall n \geqslant n_0, \forall x \in \mathbb{R}^+,\ |f_n(x) - f(x)| = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant n \\ |f(x)| & \text{si } x > n \end{cases}$.
Donc $\forall n \geqslant n_0, \forall x \in \mathbb{R},\ |f_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon$.
On a montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \|f_n - f\|_\infty = 0$.
Donc la suite de fonction (f_n) converge uniformément vers f.

Exercice 7. Pour $x \geq 0$ et $n \geq 1$, on pose $f_n(x) = \left(1 - \dfrac{x}{n}\right)^n \chi_{[0,n]}(x)$.

a. On pose, pour $x \in \mathbb{R}^+$, $u_n(x) = f_n(x) - e^{-x}$. Soit $a \in [0, n]$. Montrer que si $u_n'(a) = 0$, alors $u_n(a) = -\frac{a}{n}e^{-a}$. Calculer $\alpha_n = \max\limits_{t \in [0,n]} \dfrac{t}{n} e^{-t}$.

b. En déduire que $\|u_n\|_\infty \leqslant \dfrac{\mathrm{e}^{-1}}{n}$.

c. Montrer que la suite $(f_n)_n$ converge uniformément sur $\mathbb{R}^+$ vers la fonction $x \mapsto e^{-x}$.

Correction :

a Soit $n \geqslant 1$ et $x \in [0, n]$, on a $u_n(x) = \left(1 - \dfrac{x}{n}\right)^n - \mathrm{e}^{-x}$. Donc :

$$u'(x) = n \times \frac{-1}{n} \times \left(1 - \frac{x}{n}\right)^{n-1} + \mathrm{e}^{-x} = -\left(1 - \frac{x}{n}\right)^{n-1} + \mathrm{e}^{-x}$$

Donc si $u_n'(a) = 0 \Leftrightarrow \left(1 - \frac{a}{n}\right)^{n-1} = \mathrm{e}^{-a}$.

On obtient : $u_n(a) = \left(1 - \dfrac{a}{n}\right)^n - \mathrm{e}^{-a} = \left(1 - \dfrac{a}{n}\right)\mathrm{e}^{-a} - \mathrm{e}^{-a} = -\dfrac{a}{n}e^{-a}$.

On étudie la fonction positive g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ g(t) = \frac{t}{n} e^{-t}$$

On obtient :

$$\forall t \in \mathbb{R},\ g'(t) = \frac{1}{n}(1 - t)\, e^{-t}$$

D'où le tableau de variation :

x	0		1		n
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	0	$\nearrow$	$\frac{\mathrm{e}^{-1}}{n}$	$\searrow$	e^{-n}

Donc $\alpha_n = \max\limits_{t \in [0,n]} \dfrac{t}{n} e^{-t} = \dfrac{\mathrm{e}^{-1}}{n}$. Donc $\|u_n\|_{\infty,[0,n]} = \alpha_n = \dfrac{\mathrm{e}^{-1}}{n}$

b Pour majorer $\|u_n\|_\infty$. On a :

- Soit $x \in]n, +\infty[$, alors $|u_n(x)| = \mathrm{e}^{-x} \leqslant \mathrm{e}^{-n}$. Donc $\|u_n\|_{\infty,]n,+\infty[} = \mathrm{e}^{-n} \leqslant \alpha_n$ (voir tableau de variation précédent).
- u_n est une fonction continue sur $[0, n]$ et dérivable sur $]0, n[$. On rappelle qu'une fonction continue sur un segment (ici $[0, n]$) atteint ses bornes : c'est-à-dire que

$$\exists a \in [0, n],\ |u_n(a)| = \|u_n\|_{\infty,[0,n]}$$

(la fonction $|u_n|$ est continue puisque u_n est continue). Donc si $|u_n|$ admet un maximum en a sur $]0, n[$ alors c'est un extremum pour u_n et $u_n'(a) = 0$ donc $|u_n(a)| = g(a)$. Or $g(a) \leqslant \alpha_n = \dfrac{\mathrm{e}^{-1}}{n}$. Si u_n n'admet pas d'extremum sur $]0, n[$, comme elle est continue, elle admet un extremum en 0 ou n et donc soit $u_n(0) = 0$ et $u_n(n) = -\mathrm{e}^{-n}$ sont les extremums. Et donc $|||u_n|||_{\infty,[0,n]} = \mathrm{e}^{-n}$. Mais dans tous les cas $|||u_n|||_{\infty,[0,n]} \leqslant \alpha_n$.

Dés lors $|||u_n|||_\infty \leqslant \alpha_n$.

c Comme $|i\alpha_n = 0$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} |||u_n|||_\infty = 0$. Donc la convergence est uniforme.

Exercice 8. Pour $n \geq 3$, on définit $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ par :

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 \;\text{ si } 0 \leq x \leq \frac{1}{2} - \frac{1}{n}, \\ \\ \frac{n}{2}(x - \frac{1}{2} + \frac{1}{n}) \;\text{ si } \frac{1}{2} - \frac{1}{n} \leq x \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{n}, \\ \\ 1 \;\text{ si } \frac{1}{2} + \frac{1}{n} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

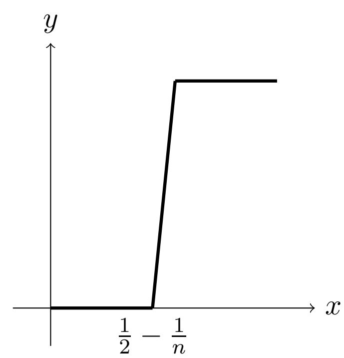
a. Dessiner l'allure du graphe des fonctions f_n.

b. Etudier la convergence simple de la suite $(f_n)_n$.

c. Montrer que la suite $(f_n)_n$ converge localement uniformément sur $[0,1] \setminus \{\frac{1}{2}\}$, mais qu'elle ne converge pas uniformément sur $[0,1]$.

Correction :

a On a la représentation :



On observe que la suite (f_n) converge simplement vers la fonction :

$$\forall x \in [0,1],\;\; f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [0, \frac{1}{2}[\\ 0,5 & \text{si } x = \frac{1}{2} \\ 1 & \text{si } x \in]\frac{1}{2}, 1[\end{cases}$$

b On a :

- $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n\left(\dfrac{1}{2}\right) = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2}$
- Si $x \in [0, \frac{1}{2}[$, alors $\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant n_0,\;\; x \in [0, \frac{1}{2} - \frac{1}{n}] \Rightarrow f_n(x) = 0$. Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = 0$.
- Si $x \in]\frac{1}{2}, 1]$, alors $\exists n_1 \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant n_1,\;\; x \in [\frac{1}{2} + \frac{1}{n}, 1] \Rightarrow f_n(x) = 1$. Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = 1$.

D'où la convergence simple observée en a.

c Soit $[a,b] \subset [0,1] \setminus \{\frac{1}{2}\}$, si $[a,b] \subset [0, \frac{1}{2}[$:

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant n_0,\;\; [a,b] \subset [0, \frac{1}{2} - \frac{1}{n}] \Rightarrow \|f_n(x) - f\|_{\infty,[a,b]} = 0$$

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \|f_n(x) - f\|_{\infty,[a,b]} = 0$.

On fait de même à droite de $\frac{1}{2}$, d'où la suite $(f_n)_n$ converge localement uniformément sur $[0,1] \setminus \{\frac{1}{2}\}$.

Par ailleurs $\forall n \in \mathbb{N},\ \|f_n - f\|_{\infty,[0,1]} \geqslant \frac{1}{2}$ puisque

$$\lim_{m\to+\infty} \left|f_n\left(\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{m}\right) - f\left(\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{m}\right)\right| = \lim_{m\to+\infty} \left|\tfrac{n}{2}\left(\tfrac{1}{m}+\tfrac{1}{n}\right) - 1\right| = \frac{1}{2}$$

La convergence n'est donc pas uniforme sur $[0,1]$.

Exercice 9. On considère des fonctions $f_n : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$. On suppose que pour tout n, $f_n(x)$ tend vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$. On suppose de plus que la suite de fonctions $(f_n)_n$ converge vers une fonction $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ uniformément sur $\mathbb{R}^+$.

Montrer que $f(x)$ tend vers zéro lorsque x tend vers $+\infty$.

Correction :

On rappelle les définitions de limites suivantes :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0 \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0, \exists A \in \mathbb{R}^+, \forall x > A,\ |f(x)| \leqslant \varepsilon$$

Et de plus :

$$\lim_{n\to+\infty} \|f_n - f\|_\infty = 0 \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n > n_0,\ \|f_n - f\|_\infty \leqslant \varepsilon$$

Soit donc $\varepsilon > 0$, puisque la convergence de la suite de fonction (f_n) est uniforme sur $\mathbb{R}^+$, on a :

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant n_0,\ \|f_n - f\|_{\infty,\mathbb{R}^+} \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$$

Comme f_{n_0} a une limite nulle en $+\infty$, l'on a :

$$\exists A \in \mathbb{R}^+, \forall x \geqslant A,\ |f_{n_0}(x)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$$

Donc :

$$\forall x \geqslant A, |f(x)| \leqslant |f_{n_0}(x) - f(x)| + |f_{n_0}(x)| \leqslant \|f_{n_0} - f\|_{\infty,\mathbb{R}^+} + |f_{n_0}(x)| \leqslant \varepsilon$$

On a donc bien montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

Exercice 10. On considère des fonctions $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}^+$, décroissantes. On suppose que la suite $(f_n)_n$ converge simplement sur $[a,b]$ vers la fonction nulle. Montrer que la convergence est uniforme. Le résultat reste-t-il vrai si on remplace $[a,b]$ par $\mathbb{R}$?

Correction : Puisque les fonctions f_n sont décroissantes et **positives**, on a :

$$\|f_n\|_{\infty,[a,b]} = f_n(a) \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \|f_n\|_{\infty,[a,b]} = \lim_{n\to+\infty} f_n(a) = 0$$

D'où la convergence uniforme.

Si l'on f_n sur $\mathbb{R}$ par $\forall x \in \mathbb{R},\ f_n(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{n}$, on montre facilement que la suite de fonction (f_n) converge simplement vers la fonction nulle. Or les fonctions f_n sont bien décroissantes et positives. Or $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \|f_n\|_\infty = +\infty$, la convergence n'est donc pas uniforme.

Exercice 11. Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions bornées définies sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$, qui converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers f. Montrer que f est bornée. Le résultat reste-t-il vrai si l'on suppose uniquement que la convergence est simple ?

Correction : Comme la suite de fonction (f_n) converge uniformément vers f , on a :

$$\exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant n_0, \ \|f_n - f\|_\infty \leqslant 1$$

Or f_{n_0} est bornée sur $\mathbb{R}$ donc $\exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}, \ |f_{n_0}(x)| \leqslant M$.

Donc $\forall x \in \mathbb{R}, \ |f(x)| \leqslant |f(x) - f_{n_0}(x)| + |f_{n_0}(x)| \leqslant \|f_n - f\|_\infty + M = 1 + M$

- Si l'on considère que la convergence est seulement simple. On considérons les fonctions $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f_n(x) = x\chi_{[-n,n]}(x)$. Alors $\|f_n\|_\infty = n$. Donc les f_n sont bornées. La suite des (f_n) converge simplement sur $\mathbb{R}$ vers la fonction $x \mapsto x$ qui n'est pas bornée.
- Si l'on considère que la convergence simple mais sur un segment (intervalle fermé borné comme demandé Mohamed) Alors on considère la suite de fonction $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \dfrac{1}{x}\chi_{[\frac{1}{n},1]}(x)$. Les fonction f_n sont bornée et la fonction vers laquelle la suite converge n'est pas bornée. (la convergence est simple. (On peut même poser $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \dfrac{1}{x}\chi_{[\frac{1}{n},1]}(x) + \chi_{[0,\frac{1}{n}[}(x)nx$ et dès lors les fonctions f_n sont continues !!!)

Exercice 12. On considère les fonctions $(f_n)_n : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ définies par $f_n(x) = \dfrac{nx}{1+nx}$.

a. Montrer que la suite $(f_n)_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}^+$ vers une fonction f que l'on caractérisera.

b. Étudier la continuité des f_n et de f. Que peut-on en déduire concernant la convergence uniforme ?

c. Montrer que pour tout $a > 0$, la suite f_n converge vers f uniformément sur $[a, +\infty[$.

Correction :

a Soit $x \in \mathbb{R}^+$, on a :

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Donc la suite de fonction $(f_n)_n$ converge simplement vers la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

b Les fonctions f_n sont continues sur $\mathbb{R}^+$ or f est discontinue en 0. Or si la convergence était uniforme, la fonction f serait continue (voir résultat cours). Donc la convergence n'est pas uniforme sur $\mathbb{R}^+$.

c Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. Si l'on pose $\forall x \in \mathbb{R}^+, \ u_n(x) = f(x) - f_n(x)$, alors :

$$\forall x \in [a, +\infty[, u'(x) = \frac{-n}{(1+nx)^2} < 0$$

D'où le tableau de variation :

x	a		$+\infty$
$u_n'(x)$		$-$	
u_n	$u_n(a)$	$\searrow$	0

$\Rightarrow \|f(x) - f_n(x)\|_{\infty,[a,+\infty[} = \|u_n\|_{\infty,[a,+\infty[} = u_n(a) = \dfrac{1}{1+na} \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} \|u_n\|_{\infty,[a,+\infty[} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{1+na} = 0.$

Donc la suite de fonctions $(f_n)_n$ converge uniformément sur $[a, +\infty[$ vers la fonction f (constante égale à 1 sur $]0; +\infty[$.

Exercice 13. On pose $u_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}$.

a. Montrer que la suite $(u_n)_n$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers une fonction u que l'on déterminera.

b. Étudier la convergence de la suite des dérivées $(u'_n)_n$.

c. Montrer que u n'est pas dérivable en zéro. Commentaires ?

Correction :

a La suite de fonction $(u_n)_n$ converge simplement vers la fonction valeur absolue $x \mapsto |x|$ (en effet $\sqrt{x^2} = |x|$)
On pose $v_n : x \mapsto u_n(x) - |x|$. On obtient :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ v_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} - |x| = \frac{x^2 + \frac{1}{n} - x^2}{\sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} + |x|} = \frac{1}{n\left(\sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} + |x|\right)}$$

Comme $n\left(\sqrt{x^2 + \frac{1}{n}} + |x|\right) \geqslant n\sqrt{\frac{1}{n}} = \sqrt{n}$, on a : $\forall x \in \mathbb{R},\ 0 \leqslant v_n(x) \leqslant \frac{1}{\sqrt{n}} = v_n(0)$.

Donc $\|v_n\|_\infty = \dfrac{1}{\sqrt{n}} \Rightarrow \lim\limits_{n \to +\infty} \|v_n\|_\infty = 0$. Donc la convergence de la suite de fonctions $(u_n)_n$ est uniforme sur $\mathbb{R}$.

b On obtient :

$$\forall x \in \mathbb{R}, u'_n(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}}$$

Donc $\lim\limits_{n \to +\infty} u'_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$

c En 0 la fonction valeur absolue n'est pas dérivable : la limite du taux d'accroissement à droite est 1 et -1 à gauche (la tangente à droite n'est pas la même que la tangente à gauche) .
Si la convergence de la suite (u'_n) était uniforme sur $\mathbb{R}$ alors la fonction valeur absolue serait C^1 sur $\mathbb{R}$. Or ce n'est pas le cas. Donc la convergence de la suite (u'_n) n'est pas uniforme sur $\mathbb{R}$.
Remarque : Si l'on note g la limite simple de la suite (u'_n) (voir question b.) Soit $a > 0$. On a facilement :

$$\left\|g(x) - u'_n(x)\right\|_{\infty,[a,+\infty[} \leqslant 1 - \frac{a}{\sqrt{a^2 + \frac{1}{n}}}$$

Et on montre ainsi que la limite est uniforme sur tout intervalle de la forme $[a, +\infty[$ avec $a > 0$. On peut faire de même à droite de 0 d'où la convergence locale uniforme sur $\mathbb{R}^*$.

Exercice 14. On considère la suite des fonctions $f_n : [0, 1] \to \mathbb{R}$ définies par :

$$f_n(x) = x(1 + \sqrt{n}e^{-nx}).$$

a. Montrer que la suite $(f_n)_n$ converge uniformément sur $[0, 1]$ vers une limite que l'on précisera.

b. Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} \displaystyle\int_0^1 x(1 + \sqrt{n}e^{-nx})\, dx$.

a Si $x > 0$, on montre facilement par croissance comparer que $\lim\limits_{n \to +\infty} f_n(x) = x$ et sinon $\lim\limits_{n \to +\infty} f_n(0) = 0$.
Donc la suite $(f_n)_n$ converge simplement sur $[0, 1]$ vers la fonction $f : x \mapsto x$.
On pose $\forall x \in [0, 1],\ u_n(x) = f_n(x) - f(x) = x\sqrt{n}\mathrm{e}^{-nx}$. Donc $\forall x \in [0, 1],\ u'_n(x) = \sqrt{n}(1 - nx)\mathrm{e}^{-nx}$.
D'où le tableau de variation de u_n :

x	0		$\frac{1}{n}$		1
$u_n'(x)$		$+$	0	$-$	
u_n	0	$\nearrow$	$\frac{1}{\sqrt{n}\mathrm{e}}$	$\searrow$	$\sqrt{n}\mathrm{e}^{-n}$

Donc $\|f_n - f\|_{\infty,[0,1]} = \frac{1}{\sqrt{n}\mathrm{e}}$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \|f_n - f\|_{\infty,[0,1]} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}\mathrm{e}} = 0$.
Donc la convergence est uniforme sur $[0,1]$.

b Comme les fonctions f_n sont continues sur $[0,1]$ et que la suite $(f_n)_n$ converge simplement vers la fonction f, on peut *intervertir* :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 x(1+\sqrt{n}e^{-nx})\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \lim_{n\to+\infty} x(1+\sqrt{n}e^{-nx})\,\mathrm{d}x = \int_0^1 x\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2}$$

Exercice 15. Calculer, en justifiant les calculs, les limites suivantes :

1. $\lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\int_0^2 \ln\left(e^x + \frac{x}{n}\right) dx$,
2. $\lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\int_0^\pi \sin^n x\, dx$,
3. $\lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\frac{x}{n}}}{1+x^2}\, dx$,
4. $\lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\int_0^n \left(1+\frac{x}{n}\right)^n e^{-2x} dx$,
5. $\lim\limits_{n\to+\infty} \displaystyle\int_0^1 nx(1-x)^n\, dx$,

Correction :

1. Si l'on pose $\forall x \in [0,2],\ f_n(x) = \ln\left(e^x + \frac{x}{n}\right)$ la suite de fonction $(f_n)_n$ converge simplement vers la fonction $f : x \mapsto x$. On pose $u_n = f_n - f$. On a : $\forall x \in [0,2],\ u_n(x) = \ln\left(1 + \frac{x}{n}\mathrm{e}^{-x}\right) \leqslant \frac{x}{n}\mathrm{e}^{-x}$.
On étudie $g : x \mapsto \frac{x}{n}\mathrm{e}^{-x}$ sur $[0,2]$. On a $g'(x) = \frac{1}{n}(1-x)\mathrm{e}^{-x}$. D'où le TV :

x	0		1		2
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
g	0	$\nearrow$	$\frac{1}{ne}$	$\searrow$	$\frac{2}{ne^2}$

Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \|f_n - f\|_{\infty,[0,2]} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{ne} = 0$ donc la convergence est uniforme sur $[0,2]$ et comme les fonctions f_n sont continues, on a :

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^2 \ln\left(e^x + \frac{x}{n}\right) dx = \int_0^2 x\, dx = 2$$

2. On montre que la suite de fonction $f_n : x \mapsto \sin^n(x)$ converge simplement vers la fonction continue pas morceau $f : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [0, \frac{\pi}{2}[\cup]\frac{\pi}{2}, \pi] \\ 1 & \text{si } x = \frac{\pi}{2} \end{cases}$ sur $[0,\pi]$. Par ailleurs $\forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in [0,1],\ |\sin^n(x)| \leqslant \chi_{[0,\pi]}(x)$

et la fonction $\chi_{[0,\pi]}$ est intégrable sur $[0,\pi]$. On a donc toutes les hypothèses de convergence dominée. Donc :

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^\pi \sin^n x\,dx = \int_0^\pi f(x)\,dx = 0$$

3. On montre que la suite de fonction $f_n : x \mapsto \frac{e^{-\frac{x}{n}}}{1+x^2}$ converge simplement vers la fonction continue $f : x \mapsto \dfrac{1}{1+x^2}$ sur $\mathbb{R}^+$. Comme $\forall x \in [0,+\infty[,\ \mathrm{e}^{\frac{-x}{n}} \leqslant 1$, on a $\forall x \in [0,+\infty[,\ \left|\frac{e^{-\frac{x}{n}}}{1+x^2}\right| \leqslant f(x)$ et que f est intégrable sur $[0,+\infty[$ ($\lim\limits_{A\to+\infty}\displaystyle\int_0^A \frac{1}{1+x^2}\mathrm{dx} = \lim\limits_{A\to+\infty}[\arctan(x)]_0^A = \lim\limits_{A\to+\infty}\arctan(A) = \frac{\pi}{2}$)
   On a : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty}\frac{e^{-\frac{x}{n}}}{1+x^2}\,dx = \lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}\,dx = \frac{\pi}{2}$
4. On note $\forall x \in \mathbb{R}^+,\ f_n(x) = \chi_{[0,n]}(x)\left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n \mathrm{e}^{-2x} = \chi_{[0,n]}(x)\mathrm{e}^{n\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)}\mathrm{e}^{-2x}$. Soit $x \in \mathbb{R}^+$, on a :

$$n\ln\left(1+\frac{x}{n}\right) \sim x$$

   Donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n = \mathrm{e}^x$. Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = \mathrm{e}^{-x}$.
   Donc la suite (f_n) converge simplement vers $x \mapsto \mathrm{e}^{-x}$.
   Par ailleurs $\forall x \in \mathbb{R}^+$

$$\begin{aligned}\ln\left(1+\frac{x}{n}\right) \leqslant \frac{x}{n} &\Rightarrow n\ln\left(1+\frac{x}{n}\right) \leqslant x\\ &\Rightarrow n\ln\left(1+\frac{x}{n}\right) - 2x \leqslant -x\\ &\Rightarrow \exp\left(n\ln\left(1+\frac{x}{n}\right) - 2x\right) \leqslant \mathrm{e}^{-x}\\ &\Rightarrow |f_n(x)| = \chi_{[0,n]}(x)\left(1+\frac{x}{n}\right)^n \mathrm{e}^{-2x} \leqslant \mathrm{e}^{-x}\end{aligned}$$

   Or la fonction $x \mapsto \mathrm{e}^{-x}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$
   On a donc

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^n\left(1+\frac{x}{n}\right)^n e^{-2x}dx = \lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty} f_n(x)dx = \int_0^{+\infty}\lim_{n\to+\infty} f_n(x)dx = \int_0^{+\infty} e^{-x}dx = 1$$

5. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 nx(1-x)^n\,dx$? On note $\forall x \in \mathbb{R}^+,\ f_n(x) = nx(1-x)^n$. Soit $x \in \mathbb{R}^+$, on a :

$$f_n'(x) = n(1-x)^{n-1}(1-nx)$$

   D'où le TV :

x	0		$\frac{1}{n}$		1
$f_n'(x)$		$+$	0	$-$	
f_n	0	$\nearrow$	$(1-\frac{1}{n})^n$	$\searrow$	0

On a $\forall x \in [0,1],\ |f_n(x)| \leqslant (1-\frac{1}{n})^n \leqslant 1$. Or la suite (f_n) converge simplement vers la fonction nul. Comme la fonction constante égale à 1 est intégrable sur $[0,1]$.

On a : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_0^1 nx(1-x)^n\,dx = \lim_{n\to+\infty}\int_0^1 0\,dx = 0$

Exercice 16. On considère une suite de polynômes $(P_n)_n$ qui converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers f.

a. En écrivant le critère de Cauchy, montrer qu'il existe n_0 tel que pour n et m supérieurs à n_0, $P_n - P_m$ est une constante.

b. On note $a_n = P_n - P_{n_0}$. Montrer que la suite $(a_n)_n$ converge dans $\mathbb{R}$.

c. En déduire que f est un polynôme.

Correction :

a. En utilisant la critère de Cauchy de convergence uniforme :

$$\forall\varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n, p \geqslant n_0,\ |P_n - P_p| \leqslant \varepsilon$$

Or si d°$(P_n - P_p) > 0$ alors $\lim_{x\to+\infty} |(P_n - P_p)(x)| = +\infty$. Donc ce serait en contradiction avec le critère de Cauchy. Donc d°$(P_n - P_p) \leqslant 0$, et $P_n - P_p$ est constant. Attention cette constante en fonction du paramètre x dépend des indices n et m.

b. Notons $a_n \in \mathbb{R}$ la constante telle que $\forall x \in \mathbb{R}, a_n = P_n(x) - P_{n_0}(x)$.
Soit $x \in \mathbb{R}$ alors comme la convergence est uniforme elle est aussi simple et $\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} P_n(x) - P_{n_0}(x) = f(x) - P_{n_0}(x)$. Donc la suite (a_n) converge. Notons $C \in \mathbb{R}$ cette limite. Attention comme a_n ne dépend pas de x, cette constante C ne dépendant pas de x. On $f(x) = C + P_{n_0}(x)$ et ceci $\forall x \in \mathbb{R}$.

c. Donc f est un polynôme.

Exercice 17. On considère les fonctions $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$, croissantes. On suppose que la suite $(f_n)_n$ converge simplement sur $[a,b]$ vers une fonction continue f. On veut montrer que la convergence est uniforme (Théorème de Dini).

a. On fixe $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe $\eta > 0$ tel que

$$\forall\, x \in [a,b],\ \forall\, y \in [a,b], \quad |x-y| \leq \eta \Longrightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon.$$

b. Soit $N \in \mathbb{N}^*$ tel que $\dfrac{b-a}{\eta} \leq N$. On note $a_k = a + k\dfrac{b-a}{N}$. Montrer que :

$$\forall\, x \in [a,b],\ \exists\, k \in \{0, \dots N-1\}, \quad x \in [a_k, a_{k+1}] \subset [a,b]$$

c. Montrer qu'il existe n_0 tel que

$$\forall\, n \geq n_0,\ \forall\, k \in \{0, \dots, N\}, \quad |f_n(a_k) - f(a_k)| \leq \varepsilon.$$

d. Soit $k \in \{0, \dots, N-1\}$. Soit $x \in [a_k, a_{k+1}]$. Montrer que

$$|f(x) - f_n(x)| \leq |f(x) - f(a_k)| + |f(a_k) - f_n(a_k)| + |f_n(a_{k+1}) - f_n(a_k)|.$$

e. Soit $k \in \{0, \dots, N\}$. Montrer que

$$|f_n(a_{k+1}) - f_n(a_k)| \leq |f_n(a_{k+1}) - f(a_{k+1})| + |f(a_{k+1}) - f(a_k)| + |f(a_k) - f_n(a_k)|.$$

f. Déduire de ce qui précède que pour tout $n \geq n_0$, pour tout $x \in [a,b]$,

$$|f_n(x) - f(x)| \leq 5\varepsilon.$$

Conclusion ?

g. Le résultat est-il vrai si f n'est pas supposée continue ?
Correction :

a. La continuité sur un segment implique la continuité uniforme.

b. Soit $x \in [a,b[$, on pose : $k = \lfloor \dfrac{N(x-a)}{(b-a)} \rfloor$. Donc :

$$k \leqslant \frac{N(x-a)}{(b-a)} < k+1 \Leftrightarrow a_k = a + k\frac{b-a}{N} \leqslant x < a_{k+1} = a + (k+1)\frac{b-a}{N}$$

Comme $\dfrac{N(x-a)}{(b-a)} \leqslant 0$, on a : $k \geqslant 0$ et :

$$x - a < b - a \Rightarrow \frac{x-a}{b-a} < 1 \Rightarrow \frac{N(x-a)}{(b-a)} < N \Rightarrow k \leqslant N-1$$

Sinon $a_N = b$ donc $b \in [a_{N-1}, a_N]$.

c. Soit $k \in \{0, \dots, N\}$, comme la suite (f_n) converge simplement vers la fonction f, on a :

$$\exists N_k \in \mathbb{N}, \forall n \geqslant N_k,\ |f_n(a_k) - f(a_k)| \leqslant \varepsilon$$

On pose $n_0 = \max\limits_{k \in \{0,\dots,N\}} (N_k)$
Dés lors : $\forall k \in \{0, \dots, N\}$

Exercice 18. On considère la suite des fonctions $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ telles que :

$$\exists\, M,\ \forall\, (x,y) \in [a,b]^2,\ \forall\, n,\ |f_n(x) - f_n(y)| \leq M|x-y|.$$

On suppose que la suite $(f_n)_n$ converge simplement vers f.

a. Montrer que f vérifie :

$$\forall\, (x,y) \in [a,b]^2,\ |f(x) - f(y)| \leq M|x-y|.$$

b. Montrer que la convergence est uniforme.

Exercice 19. On rappelle le théorème de Weierstrass :

Théorème. *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, continue. Il existe une suite de fonctions polynomiales $(u_n)_n$ qui converge uniformément vers f sur $[a,b]$.*

On considère une fonction g, continue sur $[a,b]$, telle que

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ \int_a^b g(t)t^n dt = 0.$$

a. Montrer que pour tout polynôme P, on a

$$\int_a^b g(t)P(t)dt = 0.$$

b. En utilisant le théorème de Weiestrass, montrer que

$$\int_a^b |g(t)|^2 dt = 0.$$

c. En utilisant la continuité et la positivité de la fonction $t \mapsto |g(t)|^2$, montrer que g est la fonction nulle (on raisonnera par l'absurde, en remarquant que si $g(t_0) \neq 0$, alors g est non nulle dans un voisinage de t_0).

Exercice 20. Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, continue. On peut montrer que

$$\lim_{n \to +\infty} \int_a^b f(t) \sin nt \, dt = 0.$$

a. On fixe $\varepsilon > 0$. En utilisant le théorème de Weierstrass, montrer qu'il existe un polynôme g tel que :

$$\forall\, t \in [a, b],\ |f(t) - g(t)| \leq \varepsilon.$$

b. Grâce à une intégration par parties, montrer que

$$\int_a^b g(t) \sin nt \, dt \to 0 \text{ quand } n \to 0.$$

c. En écrivant que

$$\left| \int_a^b f(t) \sin nt \, dt \right| \leq \left| \int_a^b (f(t) - g(t)) \sin nt \, dt \right| + \left| \int_a^b g(t) \sin nt \, dt \right|,$$

montrer que pour n assez grand,

$$\left| \int_a^b f(t) \sin nt \, dt \right| \leq (b - a + 1)\varepsilon.$$

d. Conclure.

Correction :

Exercice 21. On considère la série de fonctions $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$, avec $f_n(x) = \frac{x}{n} e^{-nx}$.

a. Montrer que cette série converge normalement sur $\mathbb{R}^+$.

b. Montrer que la somme de la série, notée S est continue sur $\mathbb{R}^+$.

c. Montrer que pour tout $a > 0$, la série de terme général $f_n'(x)$ est normalement convergente sur $[a, +\infty[$.

d. Montrer que S est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$.

Correction :

a. Pour $n \geq 1$ fixé, on calcule le sup de $|f_n|$ sur $\mathbb{R}^+$ en étudiant la fonction f_n. Cette fonction est positive,

$$f_n'(x) = e^{-nx} \left(\frac{1}{n} - x \right),$$

donc $f_n'(x) = 0$ si et seulement si $x = \frac{1}{n}$. Sur $[0, \frac{1}{n}]$, f_n est croissante positive, sur $[\frac{1}{n}, +\infty]$, f_n est décroissante à valeurs positives, donc :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}^+,\ 0 \leq f_n(x) \leq f_n(\frac{1}{n}) = \frac{e^{-1}}{n^2}.$$

La série $\sum_{n\geq 1} \frac{e^{-1}}{n^2}$ converge par critère de Riemann, donc la série de fonctions $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ est normalement convergente sur $\mathbb{R}^+$

b. La série de fonctions $\sum_{n\geq 1} f_n(x)$ est normalement convergente sur $\mathbb{R}^+$, donc elle est uniformément convergente sur $\mathbb{R}^+$. Pour tout $n \geq 1$, la fonction f_n est continue sur $\mathbb{R}^+$.

Donc, la somme de la série est continue sur $\mathbb{R}^+$ (voir leçon 1, chapitre IV, paragraphe B, premier théorème).

c. On fixe $a > 0$. Pour $n \geq 1$, on a $f_n'(x) = e^{-nx}\left(\frac{1}{n} - x\right)$. On va calculer le sup de $|f_n'|$ sur $[a, +\infty[$ en étudiant cette fonction. On a :

$$f_n''(x) = e^{-nx}\left(-1 + nx - 1\right),$$

qui s'annule en $x = \frac{2}{n}$.

La fonction f_n' est donc décroissante sur $[0, \frac{2}{n}]$ puis croissante de $[\frac{2}{n}, +\infty[$. Donc :

$$\forall\, x \geq 0,\ f_n'(\frac{2}{n}) \leq f_n'(x) \leq \max\left\{f_n'(0), \lim_{x\to+\infty} f_n'(x)\right\} = \frac{1}{n},.$$

En remarquant que $|f_n'(\frac{2}{n})| = \frac{1}{n}e^{-2} \leq \frac{1}{n}$, $\lim_{x\to+\infty} f_n'(x) = 0$ et $f_n'(0) = \frac{1}{n}$, on obtient :

$$\forall\, x \geq 0,\ |f_n'(x)| \leq \frac{1}{n}. \tag{1}$$

On remarque à ce stade qu'on ne peut pas montrer qu'il y a convergence normale sur $\mathbb{R}$ car $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ diverge. On va donc affiner la majoration en utilisant que l'on majore sur $[a, +\infty[$, en identifiant deux cas selon n : soit $a \geq \frac{1}{2n}$, soit $a < \frac{1}{2n}$.

On note n_0 le premier indice n tel que $a \geq \frac{1}{2n}$:

$$n_0 = \min\{n \geq 1,\ a \geq \frac{1}{2n}\}.$$

On a donc 2 cas :

— si $1 \leq n < n_0$, *i.e.* si $\frac{2}{n} > a$, avec (1), on a :

$$\forall\, x \geq a, |f_n'(x)| \leq \frac{1}{n}.$$

— si $n \geq n_0$, *i.e.* si $\frac{2}{n} \leq a$, pour tout $x \in [a, +\infty[$, $f_n''(x) \geq 0$, donc la fonction f_n' est croissante sur $[a, +\infty[$, et donc :

$$\forall\, n \geq n_0,\ \forall\, x \geq a,\ f_n'(a) \leq f_n'(x) \leq \lim_{\tau\to+\infty} f_n'(\tau) = 0.$$

Donc,

$$\forall\, n \geq n_0,\ \forall\, x \geq a,\ |f_n'(x)| \leq |f_n'(a)| = (a - \frac{1}{n})e^{-na} \leq ae^{-na}.$$

On pose $v_n = \frac{1}{n}$ pour $1 \leq n < n_0$ et $v_n = ae^{-na}$ si $n \geq n_0$.

On a :

$$\forall\, n \geq 1,\ \forall\, x \in [a, +\infty[,\ |f_n'(x)| \leq v_n.$$

De plus, la série de terme général v_n converge car à partir du rang n_0, c'est une série géométrique de raison e^{-a}, avec $|e^{-a}| < 1$ puisque $a > 0$.

Donc, la série $\sum_{n=1}^{+\infty} f'_n$ est normalement convergente sur $[a, +\infty[$.

d. Pour $a > 0$ fixé, la série $\sum_{n=1}^{+\infty} f_n$ converge normalement donc simplement sur $[a, +\infty[$. Les f_n sont dérivables sur $[a, +\infty[$. La série $\sum_{n=1}^{+\infty} f'_n$ converge normalement donc uniformément sur $[a, +\infty[$.

Donc, la somme de la série S est dérivable sur $[a, +\infty[$ et pour tout $x \in [a, +\infty[$,

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f'_n(x).$$

Les f'_n sont continues sur $[a, +\infty[$, la série $\sum_{n=1}^{+\infty} f'_n$ converge normalement donc uniformément sur $[a, +\infty[$, donc sa somme est continue, ce qui prouve que S' est continue sur $[a, +\infty[$, donc S est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, +\infty[$.

Ceci étant vrai pour tout $a > 0$, S est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{*,+}$.

Exercice 22. On considère la série de fonctions $\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{\sin(nx)}{n^3}$.

a. Montrer que cette série est normalement convergente sur $\mathbb{R}$. On note S sa somme.

b. Montrer que S est continue sur $\mathbb{R}$.

c. Montrer que S est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Correction.

a. On note $u_n(x) = \dfrac{\sin(nx)}{n^3}$. Puisque la fonction sinus prend ses valeurs entre -1 et 1, on a :

$$\forall\, n \geq 1,\ \forall\, x \in \mathbb{R},\ |u_n(x)| \leq \frac{1}{n^3}.$$

La série de terme général $\dfrac{1}{n^3}$ converge par critère de Riemann. Donc, la série de fonctions $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}$.

b. Les fonctions u_n sont continues sur $\mathbb{R}$, la série de fonctions $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ converge normalement donc uniformément sur $\mathbb{R}^+$, donc sa somme est continue sur $\mathbb{R}^+$.

c. Les fonctions u_n sont dérivables sur $\mathbb{R}^+$, et pour tout $n \geq 1$, pour tout x, $u'_n(x) = \dfrac{\cos(nx)}{n^2}$. On a donc :

$$\forall\, n \geq 1, \forall\, x \in \mathbb{R}^+,\ |u'_n(x)| \leq \frac{1}{n^2}.$$

La série $\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{1}{n^2}$ converge par critère de Riemann, donc la série de fonctions $\sum_{n=1}^{+\infty} u'_n$ est normalement convergente sur $\mathbb{R}^+$, donc est uniformément convergente sur $\mathbb{R}^+$.

En résumé, on a :

— la série $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}^+$,

— pour tout $n \geq 1$, u_n est dérivable sur $\mathbb{R}^+$,

— la série $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n'$ converge uniformément sur $\mathbb{R}^+$,

donc, la somme S de $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n$ est dérivable sur $\mathbb{R}^+$.

Exercice 23. On considère la série de fonctions $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{n^2+x^2}$.

a. Montrer qu'il y a convergence simple sur $\mathbb{R}^+$, et convergence uniforme sur $[0, A]$ pour tout $A > 0$.

b. Montrer que

$$\sum_{n=k}^{2k} \frac{k}{n^2+k^2} \geq \frac{1}{5}.$$

c. Montrer que la série n'est pas uniformément convergente sur $\mathbb{R}^+$.

Correction :

a. On fixe $x \geq 0$. Pour tout $n \geq 1$,

$$0 \leq \frac{x}{n^2+x^2} \leq \frac{x}{n^2}.$$

La série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{n^2}$ converge par critère de Riemann.

Donc, par comparaison, la série à termes positifs $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{n^2+x^2}$ converge. Ceci étant vrai pour tout $x \geq 0$, on a convergence simple sur $\mathbb{R}^+$.

Pour tout $x \in [0, A]$, pour tout $n \geq 1$, puisque $n^2 + x^2 \geq n^2$ et $0 \leq x \leq A$, on a :

$$0 \leq \frac{x}{n^2+x^2} \leq \frac{A}{n^2}.$$

La série de terme général $\frac{A}{n^2}$ étant convergente par critère de Riemann, la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{n^2+x^2}$ converge normalement et donc uniformément sur $[0, A]$.

b. Pour tout $n \in \{k, \ldots, 2k\}$, $n^2 + k^2 \leq (2k)^2 + k^2 = 5k^2$. Donc,

$$\sum_{n=k}^{2k} \frac{k}{n^2+k^2} \geq \sum_{n=k}^{2k} \frac{k}{5k^2} = (k+1)\frac{k}{5k^2},$$

puisqu'il y a $k+1$ termes dans la somme. On a donc :

$$\sum_{n=k}^{2k} \frac{k}{n^2+k^2} \geq \frac{k^2}{5k^2} = \frac{1}{5}, \tag{2}$$

car $k+1 > k$.

c. Si la série était uniformément convergente sur $\mathbb{R}^+$, elle vérifierait le critère de Cauchy uniforme. On aurait donc :

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists k_0 \geq 1,\ \forall\, k \geq k_0,\ \forall\, m \geq 0,\ \forall\, x \in \mathbb{R}^+,\ \left|\sum_{n=k}^{k+m} \frac{x}{n^2+x^2}\right| \leq \varepsilon.$$

En appliquant cette formule avec $\varepsilon = \frac{1}{10}$, on trouve donc K tel que

$$\forall\, k \geq K,\ \forall\, m \geq 0,\ \forall\, x \in \mathbb{R}^+,\ \left|\sum_{n=k}^{k+m} \frac{x}{n^2+x^2}\right| \leq \frac{1}{10}.$$

En prenant $k = K$, $m = K$, $x = K$, on obtient :

$$\sum_{n=K}^{2K} \frac{K}{n^2+K^2} \leq \frac{1}{10}.$$

Donc, avec (2), on obtient $\dfrac{1}{5} \leq \dfrac{1}{10}$, ce qui est faux.

Exercice 24. On considère la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{1+nx}$.

a. Montrer que la série converge simplement sur $\mathbb{R}^{*+}$.

b. Montrer que sa somme $x \mapsto S(x)$ est continue.

c. Calculer $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} S(x)$.

d. Montrer que S est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{*+}$.

Correction :

a. On note a_n les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $\forall x \in \mathbb{R}, a_n(x) = \dfrac{1}{1+nx}$. Pour $x \in \mathbb{R}$, l'on a $a_n(x)$ est à terme positif est constitue une suite décroissante. Par le critère des séries alternées, on a la convergence des la séries des $(a_n(x))$. On pose pour la suite $S(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{1+nx}$ et $R_N(x) = S(x) - \displaystyle\sum_{n=0}^{N-1} \frac{(-1)^n}{1+nx} = \sum_{n=N}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{1+nx}$

b. Soit $A > 0$. Par les résultats sur les séries alternées, pour $x \in [A, +\infty[$ et $N \in \mathbb{N}^*$, on a

$$|R_N(x)| \leqslant |a_n(x)| \leqslant \frac{1}{1+nA}$$

Donc $\|R_N\|_{\infty,[A,+\infty[} \leqslant \dfrac{1}{1+nA}$ donc $\displaystyle\lim_{N\to+\infty} \|R_N\|_{\infty,[A,+\infty[} = 0$

Donc l'on a convergence uniforme des sommes partielles sur $[A, +\infty[$ pour tout $A > 0$. D'où la continuité sur tout intervalle $[A, +\infty[$ (avec $A > 0$) d'où la continuité sur $\mathbb{R}^{+*}$.

c. En reprenant le résultat précédent pour $x \in \mathbb{R}^{+*}, |R_1(x)| \leqslant |a_1(x)| = \dfrac{1}{1+x}$.

Donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} R_1(x) = 0$. Or $S(x) = R_1(x) + 1$ donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} S(x) = 1$

d. $\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, a_n'(x) = \dfrac{(-1)^{n+1}n}{(1+nx)^2}$. Pour reproduire la même démonstration que précédemment, il faut pouvoir utiliser le critère de série alternée avec $b_n(x) = \dfrac{n}{(1+nx)^2}$. On a bien la convergence vers 0. Et il faut que montrer la décroissance à partir d'un certain rang.

On étudie la fonction $g(t) = \frac{t}{(1+tx)^2}$

Exercice 25. (fonction ζ de Riemann). On définit la fonction ζ par

$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}.$$

a. Montrer que ζ est une fonction $\mathcal{C}^\infty$ sur tout intervalle de la forme $[a, +\infty[$, où $a > 1$.

b. Montrer que pour tout $x > 1$ et tout $k \geq 1$,

$$\frac{1}{(k+1)^x} \leq \int_k^{k+1} \frac{dt}{t^x} \leq \frac{1}{k^x}.$$

En déduire que :

$$\forall\, x > 1,\ \zeta(x) - 1 \leq \frac{1}{x-1} \leq \zeta(x).$$

c. Donner la limite de $\zeta(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

d. Donner un équivalent de $\zeta(x)$ lorsque x tend vers 1^+.

Exercice 26. **a.** Montrer que la série de fonctions $\sum_{n=0}^{+\infty} t^n \ln t$ converge simplement sur $]0,1[$ vers la fonction $\frac{\ln t}{1-t}$.

b. Montrer que l'intégrale $\int_0^1 t^n \ln t\, dt$ converge et calculer sa valeur pour tout n.

c. Montrer que

$$\int_0^1 \frac{\ln t}{t-1} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)^2}$$

(on montrera la convergence de l'intégrale impropre).

a. On fixe $t \in]0,1[$. On calcule les sommes partielles $S_N(t)$ de la série :

$$S_N(t) = \sum_{n=0}^{N} t^n \ln t = \frac{1 - t^{N+1}}{1-t} \ln t \text{ (série géométrique de raison} t \neq 1).$$

Puisque $|t| < 1$, lorsque N tend vers $+\infty$, on obtient que $S_N(t)$ tend vers $\frac{\ln t}{1-t}$.

$$\boxed{\text{Donc, la série de fonctions } \sum_{n=0}^{+\infty} t^n \ln t \text{ converge simplement sur }]0,1[\text{ vers la fonction } t \mapsto \frac{\ln t}{1-t}.}$$

b. On fixe $n \in \mathbb{N}$. On considère l'intégrale impropre $\int_0^1 t^n \ln t\, dt$, qui est impropre en zéro. Pour tout $\varepsilon \in]0,1]$, on a :

$$\int_\varepsilon^1 t^n \ln t\, dt = \left[\frac{1}{n+1} t^{n+1} \ln t\right]_\varepsilon^1 - \int_\varepsilon^1 \frac{1}{n+1} t^{n+1} \frac{1}{t} dt$$

par intégration par parties, en dérivant $t \mapsto \ln t$ et en intégrant $t \mapsto t^n$. On a donc :

$$\int_\varepsilon^1 t^n \ln t\, dt = -\frac{1}{n+1} \varepsilon^{n+1} \ln \varepsilon - \frac{1}{n+1} \int_\varepsilon^1 t^n dt = -\frac{1}{n+1} \varepsilon^{n+1} \ln \varepsilon - \frac{1}{(n+1)^2} \left[t^{n+1}\right]_\varepsilon^1.$$

Lorsque ε tend vers 0^+, le terme de droite tend vers $-\frac{1}{(n+1)^2}$, donc :

$$\boxed{\text{l'intégration impropre } \int_0^1 t^n \ln t dt \text{ converge et vaut } -\frac{1}{(n+1)^2}.}$$

c. L'intégrale impropre $I := \displaystyle\int_0^1 \frac{\ln t}{t-1} dt$ a une singularité en zéro et une singularité en 1. La fonction intégre est positive sur $]0, 1[$.

$$\boxed{\text{Donc, l'intégrale impropre } \int_0^1 \frac{\ln t}{t-1} dt \text{ converge.}}$$

On va appliquer le théorème de convergence dominé pour changer la série et l'intégrale. On note, pour $t \in]0, 1[$, $T_N(t) = \displaystyle\sum_{n=0}^{N} -t^n \ln t$ et $T(t) = \dfrac{\ln t}{t-1}$.

- *Convergence simple.* On a montré dans le **a.** que pour tout $t \in]0, 1[$, $T_N(t)$ converge vers $T(t)$.
- *Intégrabilité sur tout segment.* Les fonctions T_N et la fonction T sont continues sur $]0, 1[$ donc elle sont Riemann intégrables sur tout segment inclus dans $]0, 1[$.
- *Domination.* Pour tout N, pour tout $t \in]0, 1[$,

  $$|T_N(t)| = (1 - t^{N+1}) \frac{\ln t}{t-1}.$$

  En posant $h(t) = \dfrac{\ln t}{t-1}$ (qui est une fonction positive sur $]0, 1[$), puisque $1 - t^{N+1} \leq 1$, on a :

  $$\forall\ N,\ \forall\ t \in]0, 1[,\ |T_N(t)| \leq h(t).$$

  La fonction h tant positive, et l'intégrale $\int_0^1 h(t) dt$ convergeant (cf. plus haut), cette fonction est intégrable sur $]0, 1[$.

On peut donc appliquer le théorème de convergence dominée, et on obtient que :

$$\int_0^1 T(t) dt = \lim_{N \to +\infty} \int_0^1 T_N(t) dt.$$

Or, en utilisant le **b.**, on a $\displaystyle\int_0^1 T_N(t) dt = \sum_{n=0}^{N} \frac{1}{(1+n)^2}$, qui tend, lorsque N tend vers $+\infty$, vers la somme de la série numérique $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(1+n)^2}$ (c'est une série convergente par critère de Riemann). Donc :

$$\boxed{\int_0^1 \frac{\ln t}{t-1} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(1+n)^2}}$$