Feuille d'exercices 10 : dénombrement

I Cardinal d'un ensemble, produit cartésien et p-liste (avec répétition).

Exercice 1

Vous pourrez répondre aux questions sans justifier.

a) Nombre de nombres entiers entre 0 et 999.

b) Nombre d'éléments de l'ensemble $[\![0,9]\!]^3$. (On appellera ce nombre le " **cardinal** " de $[\![0,9]\!]^3$ et on le notera $\text{Card}([\![0,9]\!]^3)$).

c) Nombre de nombres entiers entre 0 et 999, n'ayant ni 5 ni 7.

d) Nombre d'éléments de l'ensemble $\{0,1,2,3,4,6,8,9\}^3$.

e) Nombre de mots de 4 lettres possibles en utilisant que les 6 voyelles. (c'est-à-dire : Nombre d'éléments de $\{a,e,i,o,u,y\}^4$)

f) Soit $(n,p) \in (\mathbb{N}^*)^2$. On considère un ensemble E constitué de n éléments. Déterminer le nombre d'éléments de E^p. (Chaque élément de E^p sera appelé une **p-liste** de E)

g) Donner un élément quelconque de $\{0,1,2\} \times \{3,4\} \times \{5,6,7,8,9\}$. Déterminer :

$$\text{Card}\left(\{0,1,2\} \times \{3,4\} \times \{5,6,7,8,9\}\right)$$

h) Soit A et B deux ensembles non-vides finis. Déterminer :

$$\text{Card}(A \times B)$$

i) Plus généralement soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(A_1, \cdots A_n)$ une famille d'ensembles non vides finis. Déterminer

$$\text{Card}(A_1 \times \cdots \times A_n)$$

Exercice 2

On considère l'ensemble $E = [\![1,20]\!]$. A et B deux sous-ensembles de E constitués respectivement des nombres pairs et des multiples de 3. On note $\overline{B}$ le complémentaire de b dans E.

Donnez sans justifier (ou presque) les valeurs de :

a) $\text{Card}(E)$

b) $\text{Card}(B)$

c) $\text{Card}(\overline{B})$

d) $\text{Card}(A)$

e) $\text{Card}(A \cap B)$

f) $\text{Card}(A \cup B)$

Exercice 3

Vous disposez de 10 paires de chaussettes différentes que vous voulez ranger dans 4 tiroirs.

De combien de manières différentes pouvez-vous le faire ?

Exercice 4

On considère deux ensembles E et F finis de cardinal respectifs n et p.

Déterminer le nombre d'applications de E dans F.

II p-liste sans répétition et permutation.

Exercice 5

a) 10 amis font la course pour arriver au sommet du Pic du midi d'Ossau. On veut déterminer le nombre de podiums possibles (Les trois premiers seulement, on parlera alors de **3-liste sans répétition** d'un ensemble à 10 éléments)

b) Cette fois on s'intéresse au classement des 10 participants. Donner le nombre de classements possibles. (On parlera du nombre de **permutation** de l'ensemble constitué des 10 participants.)

c) On considère cette fois-ci qu'il y a n participants. Déterminer le nombre de podiums possibles, puis comme précédemment le nombre de classements possibles (de tous les participants).

d) Pour n participants maintenant, on classe les p premiers participants. Déterminer le nombre de p-listes sans répétition de ces n participants.

Exercice 6

On rappelle qu'une injection de E dans F est une application dont chaque élément de F a au plus 1 antécédent. On notera $\mathcal{I}(E,F)$ l'ensemble des injections de E dans F. On a $\varphi : E \to F$ injective si

$$\forall (x,x') \in E^2, \quad f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$$

1. On considère $E = [\![1;2]\!]$ et $F = [\![1;4]\!]$. Déterminer $\mathrm{Card}\,(\mathcal{I}(E,F))$.
2. On considère E et F deux ensembles finis de cardinal respectif p et n. Déterminer $\mathrm{Card}\,(\mathcal{I}(E,F))$.

III Combinaisons.

Exercice 7

Un groupe d'amis sont dans un camping : Albert, Bertrand, Colin, Didier et Éliot.

Certains doivent aller faire des courses au village d'à côté.

Vous pourrez répondre aux questions suivantes sans justifier.

Soit $p \in [\![0,5]\!]$.

On cherche de combien de façons on peut désigner p d'entre eux pour aller faire les courses.

Par exemple pour p=1. Il y a 5 façons : soit Albert, soit Bertrand, ..., soit Éliot. Chacune des ces sous-parties de l'ensemble $E = \{Albert, Bertrand, Colin, Didier, Eliot\}$ est appelée une **1-combinaison** de l'ensemble E.

Déterminer ce nombre p-combinaison pour :

a) p=2 b) p=3 c) p=4 d) p=5

Exercice 8

Soit E un ensemble à n éléments avec $n \in \mathbb{N}$ et $n \geq 2$. Soit $p \in \mathbb{N}$. On décide de noter C_p^n le nombre de p-combinaisons de l'ensemble E. (c'est-à-dire le nombre de sous-parties de E à p éléments)

1. Déterminer C_1^n.
2. Déterminer C_2^n.
3. On choisit un élément a de E. Soit $p \in [\![1;n-1]\!]$.
   (a) Parmi les réponses possibles ci-dessous laquelle représente le nombre de sous-parties à p éléments **contenant** l'élément a.

   i. C_p^n ii. C_{p-1}^n iii. C_p^{n-1} iv. C_{p-1}^{n-1}

   (b) Parmi les réponses possibles ci-dessous laquelle représente le nombre de sous-parties à p éléments **ne contenant pas** l'élément a.

   i. C_p^n ii. C_{p-1}^n iii. C_p^{n-1} iv. C_{p-1}^{n-1}
4. Déduire de la question précédente, la relation :

$$C_p^n = C_{p-1}^{n-1} + C_p^{n-1}$$

   Cette relation vous rappelle-t-elle une formule déjà vue ?
5. Montrer par récurrence que $\forall (n,p) \in \mathbb{N}^2$: $\quad C_p^n = \dfrac{n!}{(n-p)!p!}$.

   On notera :

$$\mathcal{P}_n : \forall p \in [\![0,n]\!],\ C_p^n = \frac{n!}{(n-p)!p!}$$

6. On peut retrouver l'expression de C_p^n en utilisant le nombre de p-liste sans répétition.
   (a) Donner le nombre de permutation d'une p-liste sans répétition de E.
   (b) En déduire que $C_p^n = \dfrac{\text{nb de p-liste sans répétition de E}}{p!} = \dfrac{n!}{(n-p)!p!} = \dbinom{n}{p}$

Exercice 9

1. Déterminer le nombre de fonctions indicatrices de E (c'est-à-dire le nombre d'applications de E dans $\{0;1\}$, l'ensemble $\mathcal{A}(E;\{0;1\})$
2. On considère

$$\begin{array}{cccc} \varphi & : & \mathcal{P}(E) & \rightarrow & \mathcal{A}(E;\{0;1\} \\ & & A & \mapsto & \mathbb{1}_A \end{array}$$

   Montrer que φ est bijective. En déduire $\text{Card}(\mathcal{P}(E))$.

IV Exercice en Vrac.

Exercice 10

On considère l'ensemble $E = [\![1, 10]\!]$. Donner :
a) le nombre de 3-listes de E ;
b) le nombre de 3-listes sans répétition de E ;
c) le nombre de parties de E à 3 éléments ;
d) le nombre de permutations de E ;
e) le nombre de sous-ensembles de E.

Exercice 11

Soit E l'ensemble des nombres à quatre chiffres ne comportant aucun 9. Calculer :
a) le cardinal de E ;
b) le nombre d'éléments pairs de E ;
c) le nombre d'éléments de E qui ont quatre chiffres différents ;
d) le nombre d'éléments de E qui sont multiples de 5.

Exercice 12

On appelle mot toute suite de lettres, qu'elle ait un sens ou non.
a) Combien de mots de deux lettres existe-t-il ?
b) Combien de mots de deux lettres identiques existe-t-il ?
c) Combien de mots de deux lettres différentes existe-t-il ?
d) Combien de mots de deux lettres ont leurs lettres dans l'ordre alphabétique ?
e) Combien de mots de six lettres ne contenant que des a et des b existe-t-il ?
f) Combien de mots de six lettres contenant deux a et quatre b existe-t-il ?

Exercice 13

Combien peut-on attribuer de numéros de téléphone fixe en France sachant que :
• les numéros « classiques » commencent par 01, 02, 03, 04 ou 05 (indicatif de région) et les deux chiffres suivants sont distincts ;
• les numéros de « box » commencent par 09, les autres chiffres sont quelconques.

Exercice 14

Dans un lycée de 1 200 élèves, 652 pratiquent une activité sportive, 327 jouent d'un instrument de musique et 453 ne font ni sport, ni musique. Déterminer le nombre d'élèves à la fois sportifs et musiciens.

Exercice 15

Quel doit être le nombre minimum d'habitants dans un village pour être certain que deux personnes (au moins) possèdent les mêmes initiales ?

Exercice 16

On tire simultanément k boules d'une urne qui contient n boules blanches et une noire.
a) Quel est le nombre total de tirages possibles ?
b) Combien y a-t-il de tirages sans la boule noire ?
c) Combien y a-t-il de tirages avec la boule noire ?

Exercice 17

Lors d'un repas de classe un jeudi soir, les élèves de BCPST1 du lycée Barthou trinquent. Combien entend-on de tintements de verres ?

Exercice 18

On souhaite ranger n dossiers numérotés de 1 à n dans n tiroirs également numérotés de 1 à n, en plaçant un dossier par tiroir. Déterminer :
a) le nombre total de rangements possibles ;
b) le nombre de rangements tels que le dossier 1 soit dans le tiroir 1.

Exercice 19

Combien y-a-t-il d'anagrammes du mot « liste » ?
Du mot « PROCREEE » ? Du mot « intergouvernementalisations » ?

Exercice 20

Un ensemble E possède exactement 55 parties à deux éléments. Quel est le cardinal de cet ensemble ?

Exercice 21

Nombre de diagonales.
On considère un polygone convexe à n sommets ($n \geq 3$).
a) Déterminer le nombre de diagonales de ce polygone.
b) Quels sont les polygones qui possèdent autant de diagonales que de côtés ?

Exercice 22

On considère un quadrillage de n cases sur n cases.
Quel est le nombre total de carrés dans ce quadrillage ?

Exercice 23

Soit E un ensemble fini de cardinal n. Calculer la somme des cardinaux de toutes les parties de E.

Exercice 24

Loto Foot.
Au Loto Foot 7, le joueur remplit une grille dans laquelle il indique ses pronostics pour 7 matchs de football à venir. Pour chacun des matchs, il peut cocher une des 3 cases au choix :

- $\boxed{1}$ pour une victoire de l'équipe qui reçoit
- $\boxed{N}$ pour un match nul
- $\boxed{2}$ pour une victoire de l'équipe qui se déplace

a) De combien de façons différentes un joueur peut-il remplir la grille ?
b) Combien existe-t-il de grilles dans lesquelles tous les pronostics sont faux ?
c) Combien existe-t-il de grilles avec exactement trois pronostics corrects ?
d) Pour gagner, il faut avoir trouvé au moins 6 pronostics exacts. Quel est le nombre de grilles gagnantes ?

Exercice 25

Formule de Vandermonde.
Dans une classe de BCPST, il y a N_1 filles et N_2 garçons. On veut former une équipe de n joueurs de la classe pour un sport collectif.
a) Combien peut-on former d'équipes différentes ?
b) Pour $k \in [\![0, n]\!]$ fixé, combien peut-on former d'équipes avec exactement k filles ?
c) À l'aide des questions précédentes, démontrer la formule de Vandermonde :

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{N_1}{k}\binom{N_2}{n-k} = \binom{N_1+N_2}{n}.$$

d) En déduire que l'on a :

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}.$$

Exercice 26

1. On considère une urne avec 10 boules blanches, 7 rouges et 3 noires. Déterminer le nombre de façons de choisir 6 boules avec exactement 3 blanches, 2 rouge et 1 noire.
2. Montrer que :

$$\sum_{k=0}^{6}\sum_{l=0}^{6-k} \binom{10}{k}\binom{7}{l}\binom{3}{6-k-l} = \binom{20}{6}$$

3. Soit $N = N_1 + N_2 + N_3$. Soit $n \in [\![0; n]\!]$. Montrer que :

$$\sum_{k=0}^{n}\sum_{l=0}^{n-k} \binom{N_1}{k}\binom{N_2}{l}\binom{N_3}{n-k-l} = \binom{N}{n}$$

Exercice 27

Un peu de poker.
Dans un jeu de 52 cartes, on choisit simultanément 5 cartes. Ces cinq cartes sont appelées une « main ».
a) Déterminer le nombre total de mains.
b) Déterminer le nombre de mains qui contiennent les 4 rois.
c) Déterminer le nombre de mains qui contiennent exactement un roi.
d) Déterminer le nombre de mains qui contiennent au moins un roi.
e) Déterminer le nombre de mains qui contiennent un brelan de rois (trois rois exactement).
f) Déterminer le nombre de mains qui contiennent le roi de cœur et au moins un trèfle.
g) Déterminer le nombre de « couleurs » (cinq cartes de la même couleur).
h) Déterminer le nombre de « full » (un brelan et une paire).

Exercices corrigés.

Exercice 28

Soit A, B, C trois ensembles finis tels que

$$\mathrm{Card}(A) = 14 \qquad \mathrm{Card}(B) = 18 \qquad \mathrm{Card}(C) = 20$$

$$\mathrm{Card}(A \cup B) = 26 \qquad \mathrm{Card}(A \cup C) = 27 \qquad \mathrm{Card}(B \cup C) = 30$$

$$\mathrm{Card}(A \cup B \cup C) = 35$$

Déterminer $\mathrm{Card}(A \cap B \cap C)$.

Exercice 29

Une urne contient 20 boules, numérotées de 1 à 20.

1. On tire successivement et sans remise 8 boules de cette urne (deux tirages obtenant les mêmes boules mais dans un ordre différent seront considérés comme deux tirages différents).
   - Combien y a t-il de tirages possibles ?
   - Combien y a t-il de tirages commençant par la boule 1 ?
   - Combien y a t-il de tirages finissant par la boule 20 ?
   - Combien y a t-il de tirages commençant par la boule 1 et finissant par la boule 20 ?
   - Combien y a t-il de tirages commençant par 20, 19, 18, 17 ?
   - Combien y a t-il de tirages ne comportant que des boules paires ?
   - Combien y a t-il de tirages comportant la boule numéro 1 ?
   - Combien y a t-il de tirages ne comportant pas la boule 1 ?
2. Mêmes questions pour un tirage avec remise.

Exercice 30

Calculer les sommes suivantes en fonction de $n \in \mathbb{N}$

1. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{4}{k}$
2. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k}$
3. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k-1}$
4. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}(-3)^{n-k}$
5. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k}2^{k-1}$
6. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k-1}3^k 2^{-k}$

Exercice 31

Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose

$$A = \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ pair}}}^{n} \binom{n}{k} \qquad B = \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ impair}}}^{n} \binom{n}{k}$$

Calculer $A + B$ et $A - B$. En déduire A et B

Exercice 32

Calculer les sommes suivantes

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} k \qquad \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{k+1}$$

Exercice 33

Un enfant dispose de 7 crayons de couleurs différentes et doit colorier un dessin composé de 5 zones numérotées de 1 à 5.

1. Combien y a t-il de manières de colorier le dessin ?
2. Combien y a t-il de manières de colorier le dessin de sorte que chaque zone ait une couleur différente des autres ?

Exercice 34

Pour sortir, Monsieur Dupont choisit une paire de chaussures (noires ou marron), un pantalon (bleu, beige, ou rouge), une veste (en velours ou en toile) et un chapeau (de feutre ou en cuir).

1. Combien de tenues différentes monsieur Dupont peut-il choisir ?
2. Quand Monsieur Dupont sort avec Madame Dupont, il est exclu qu'il porte les chaussures marrons avec le pantalon rouge. Combien de tenues différentes Monsieur peut-il alors porter ?

Exercice 35

1. Combien y a t-il de façons de placer huit personnes côte à côte sur une rangée de huit chaises ?

2. Combien y a t-il de façons de placer huit personnes autour d'une table ronde en ne s'occupant que de leur position relative ?
3. Combien y a t-il de façons de placer quatre hommes et quatre femmes autour d'une table ronde en respectant l'alternance 1 homme-1 femme, et en ne s'occupant que de leur position relative ?

Exercice 36

Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer le nombre de solutions $(x, y, z) \in \mathbb{N}^3$ de l'équation : $x + y + z = n$

Exercice 37

On appelle anagramme d'un mot tout mot (qu'il ait un sens ou non) formé avec les mêmes lettres.

1. Combien y a-t-il d'anagrammes du prénom « Martin » ?
2. Combien y a t-il d'anagrammes du prénom « Arnaud » ?
3. Combien y a t-il d'anagrammes du mot « Mississippi » ?

Exercice 38

Soit n et p deux entiers tels que $2 \leqslant p \leqslant n-2$. Montrer que

$$\binom{n}{p} = \binom{n-2}{p} + 2\binom{n-2}{p-1} + \binom{n-2}{p-2}$$

Exercice 39

Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose

$$C = \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ pair}}}^{n} \binom{n}{k} 2^k \qquad D = \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ impair}}}^{n} \binom{n}{k} 2^k$$

Calculer C et D

Exercice 40

En utilisant la formule du binôme de Newton, calculer les nombres suivants :

$$(1+\sqrt{5})^4 \qquad (\sqrt{2}+\sqrt{3})^5 \qquad (2+i)^7 \qquad \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^6$$

Exercice 41

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, en utilisant l'égalité $k = \sum_{i=1}^{k} 1$, calculer la somme $\sum_{k=1}^{n} k2^k$

Exercice 42

Calculer les sommes doubles suivantes

$$\sum_{(i,j)\in[\![1,n]\!]} \min(i,j) \qquad \sum_{(i,j)\in[\![1,n]\!]} \max(i,j) \qquad \sum_{(i,j)\in[\![1,n]\!]} |i-j|$$

V Applications.

Exercice 43

Soit E un ensemble fini non vide à n éléments, et F un ensemble fini non vide à p éléments.

1. Donner le nombre d'applications de E dans F.
2. Donner le nombre d'injections de E dans F.

3. Donner le nombre de bijections de E dans F .

Exercice 44

Soient $(n,p) \in \mathbb{N}^*$, avec $n \leq p$.

1. Donner le nombre d'applications strictement croissantes de $[\![1;n]\!]$ dans $[\![1,p]\!]$.
   On pourra interpréter l'application comme une injection dont on a réordonné les éléments.
2. Donner le nombre d'applications croissantes de $[\![1;n]\!]$ dans $[\![1,p]\!]$. On pourra considérer $f + Id - 1$.

Exercice 45

Un magasin propose des billes de 5 couleurs différentes. Donner le nombre de façons de remplir un sac avec 20 billes.

Exercice 46

Pour $n \in \mathbb{N}$ fixé, donner le nombre de solutions de l'équation :

$$(x,y,z,t) \in \mathbb{N}^4,\ x+y+z+t = n$$

Exercice 47

Soit n et p deux entiers naturels non nuls. On note $S_{n,p}$ le nombre de surjections d'un ensemble E à n éléments dans un ensemble F à p éléments.

1. Calculer $S_{n,1}$, $S_{n,n}$ et $S_{n,p}$ pour $p > n$.
2. Calculer $n \geq 2$ et $p \geq 1$, montrer que l'on a :

$$S_{n,p} = p\left(S_{n-1,p} + S_{n-1,p-1}\right)$$

3. Dresser un tableau analogue à celui du triangle de Pascal donnant les valeurs de $S_{n,p}$ pour $1 \leq p \leq n \leq 6$.
4. Établir la formule $\displaystyle\sum_{k=1}^{p} S_{n,p} = p^k$

VI Ensembles.

Exercice 48

Soit E un ensemble de cardinal n.

1. Déterminer le nombre de couples (A,B) de parties de E vérifiant $B \cap A$.
   Indication : Discuter suivant le nombre d'éléments de A.
2. En déduire le nombre de couples (A,B) de parties de E vérifiant $A \cup B = \emptyset$.
3. En déduire le nombre de triplets (A,B,C) de parties de E partitionnant E.

Réponse de l'exercice 28

On a

$$\mathrm{Card}(A \cup B \cup C) = \mathrm{Card}(A) + \mathrm{Card}(B) + \mathrm{Card}(C) - \mathrm{Card}(A \cap B) - \mathrm{Card}(A \cap C) - \mathrm{Card}(B \cap C) + \mathrm{Card}(A \cap B \cap C)$$

$$\mathrm{Card}(A \cup B) = \mathrm{Card}(A) + \mathrm{Card}(B) - \mathrm{Card}(A \cap B)$$

$$\mathrm{Card}(A \cup C) = \mathrm{Card}(A) + \mathrm{Card}(C) - \mathrm{Card}(A \cap C)$$

$$\mathrm{Card}(B \cup C) = \mathrm{Card}(B) + \mathrm{Card}(C) - \mathrm{Card}(B \cap C)$$

Ainsi

$$\begin{aligned}
\mathrm{Card}(A \cap B \cap C) &= \mathrm{Card}(A \cup B \cup C) - \mathrm{Card}(A) - \mathrm{Card}(B) - \mathrm{Card}(C) \\
&\qquad + \mathrm{Card}(A \cap B) + \mathrm{Card}(A \cap C) + \mathrm{Card}(B \cap C) \\
&= \mathrm{Card}(A \cup B \cup C) - \mathrm{Card}(A) - \mathrm{Card}(B) - \mathrm{Card}(C) + \mathrm{Card}(A) + \mathrm{Card}(B) - \mathrm{Card}(A \cup B) \\
&\qquad + \mathrm{Card}(A) + \mathrm{Card}(C) - \mathrm{Card}(A \cup C) + \mathrm{Card}(B) + \mathrm{Card}(C) - \mathrm{Card}(B \cup C) \\
&= \mathrm{Card}(A \cup B \cup C) + \mathrm{Card}(A) + \mathrm{Card}(B) + \mathrm{Card}(C) - \mathrm{Card}(A \cup B) - \mathrm{Card}(A \cup C) - \mathrm{Card}(B \cup C) \\
&= 35 + 14 + 18 + 20 - 26 - 27 - 30 \\
&= 4
\end{aligned}$$

Réponse de l'exercice 29

1. Dans un premier temps il s'agit de tirages sans remise, on ne peut donc pas tirer deux fois la même boule. Un tirage correspond donc à une 8-liste sans répétition.
   - Il s'agit ici simplement de compter les 8-liste sans répétition dans un ensemble à 20 éléments, le résultat est donc $\dfrac{20!}{(20-8)!} = \dfrac{20!}{12!}$
   - La première boule étant fixée, un tirage correspond à la liste sans répétition des 7 autres boules dans un ensemble à 19 éléments, soit $\dfrac{19!}{12!}$
   - C'est exactement la même situation que dans la question précédente, le résultat est le même $\dfrac{19!}{12!}$
   - La première et la dernière boules étant fixées, un tirage correspond à la liste sans répétition des 6 autres boules dans un ensemble à 18 éléments, soit $\dfrac{18!}{12!}$
   - Ici les 4 premières boules sont fixées, un tirage correspond à la liste sans répétition des 4 autres boules dans un ensemble à 16 éléments, soit $\dfrac{16!}{12!}$
   - Il s'agit ici simplement de compter les 8-liste sans répétition dans l'ensemble des nombres pairs entre 1 et 20, ensemble qui contient 10 éléments. Le résultat est donc $\dfrac{10!}{(10-8)!} = \dfrac{10!}{2!}$
   - Cette question est plutôt compliquée, on va plutôt répondre à la question « Combien y a t-il de tirages ne comportant pas la boule 1 ? »d'abord puis en déduire le résultat à la question « Combien y a t-il de tirages comportant la boule numéro 1 ? ». Compter les tirages ne comportant pas la boule 1 est simple, il s'agit simplement de compter les 8-listes sans répétition dans un ensemble à 19 éléments, le résultat est donc $\dfrac{19!}{(19-8)!} = \dfrac{19!}{11!}$. Ensuite le nombre de tirages comportant la boule 1 se calcule en comptant le nombre total de tirages possibles moins ceux qui ne contiennent pas la boule 1, soit

     $$\frac{20!}{12!} - \frac{19!}{11!} = \frac{20! - 12 \times 19!}{12!} = \frac{20 \times 19! - 12 \times 19!}{12!} = 8\frac{19!}{12!}$$

2. Dans un second temps il s'agit de tirages avec remise, on peut alors tirer deux fois la même boule. Un tirage correspond donc à une 8-liste d'éléments d'un ensemble à 20 éléments ou de manière équivalente, à une application d'un ensemble à 8 éléments dans un ensemble à 20 éléments.
   - Il s'agit ici simplement de compter les 8-liste d'éléments d'un ensemble à 20 éléments, le résultat est donc 20^8
   - La première boule étant fixée, un tirage correspond à la liste des 7 autres boules dans un ensemble à 20 éléments, soit 20^7

— C'est exactement la même situation que dans la question précédente, le résultat est le même 20^7

— La première et la dernière boules étant fixées, un tirage correspond à la liste des 6 autres boules dans un ensemble à 20 éléments, soit 20^6

— Ici les 4 premières boules sont fixées, un tirage correspond à la liste des 4 autres boules dans un ensemble à 20 éléments, soit 20^4

— Il s'agit ici simplement de compter les 8-listes dans l'ensemble des nombres pairs entre 1 et 20, ensemble qui contient 10 éléments. Le résultat est donc 10^8

— Cette question est plutôt compliquée, on va plutôt répondre à la question « Combien y a t-il de tirages ne comportant pas la boule 1 ? »d'abord puis en déduire le résultat à la question « Combien y a t-il de tirages comportant la boule numéro 1 ? ». Compter les tirages ne comportant pas la boule 1 est simple, il s'agit simplement de compter les 8-liste sans répétition dans un ensemble à 19 éléments, le résultat est donc 19^8. Ensuite le nombre de tirages comportant la boule 1 se calcule en comptant le nombre total de tirages possibles moins ceux qui ne contiennent pas la boule 1, soit $20^8 - 19^8$.

Réponse de l'exercice 30

1. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{4}{k}$

   Si $n \geqslant 4$ alors

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{4}{k} = \sum_{k=0}^{4} \binom{4}{k} + \sum_{k=5}^{n} \binom{4}{k} = 2^4 + 0 = 16$$

   Sinon alors

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{4}{k} = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 0 \\ 5 & \text{si } n = 1 \\ 11 & \text{si } n = 2 \\ 15 & \text{si } n = 3 \end{cases}$$

2. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k}$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} &= \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} + \binom{n}{0} - \binom{n}{0} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} - \binom{n}{0} \\ &= 2^n - 1 \end{aligned}$$

3. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k-1}$

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k-1} &= \sum_{i=-1}^{n-1} \binom{n}{i} \qquad \text{en posant } i = k-1 \\ &= \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} + \binom{n}{-1} - \binom{n}{n} \\ &= 2^n + 0 - 1 \\ &= 2^n - 1 \end{aligned}$$

4. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-3)^{n-k}$

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-3)^{n-k} &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-3)^{n-k} 1^k \\ &= (-3+1)^n \\ &= (-2)^n \end{aligned}$$

5. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k} 2^{k-1}$

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k} 2^{k-1} &= \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} 2^{k-1} + \binom{n-1}{n} 2^{n-1} - \binom{0}{n-1} 2^{0-1} \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} \frac{2^k}{2} + 0 - \frac{1}{2} \\
&= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} 2^k 1^{n-1-k} - \frac{1}{2} \\
&= \frac{3^{n-1} - 1}{2}
\end{aligned}$$

6. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k-1} 3^k 2^{-k}$

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k-1} 3^k 2^{-k} &= \sum_{i=-1}^{n-1} \binom{n}{i} 3^{i+1} 2^{-i-1} \qquad \text{en posant } i = k-1 \\
&= \frac{3}{2} \sum_{i=-1}^{n-1} \binom{n}{i} \left(\frac{3}{2}\right)^i \\
&= \frac{3}{2} \left(\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \left(\frac{3}{2}\right)^i + \binom{n}{-1} \left(\frac{3}{2}\right)^{-1} - \binom{n}{n} \left(\frac{3}{2}\right)^n \right) \\
&= \frac{3}{2} \left(\left(\frac{5}{2}\right)^n - \left(\frac{3}{2}\right)^n \right) \\
&= \frac{3(5^n - 3^n)}{2^{n+1}}
\end{aligned}$$

Réponse de l'exercice 31

On a

$$\begin{aligned}
A + B &= \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ pair}}}^{n} \binom{n}{k} + \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ impair}}}^{n} \binom{n}{k} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^k 1^{n-k} \\
&= (1+1)^n \\
&= 2^n
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
A - B &= \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ pair}}}^{n} \binom{n}{k} - \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ impair}}}^{n} \binom{n}{k} \\
&= \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ pair}}}^{n} \binom{n}{k} + \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ impair}}}^{n} \binom{n}{k} (-1) \\
&= \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ pair}}}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k + \sum_{\substack{k=0 \\ k \text{ impair}}}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k 1^{n-k} \\
&= (-1+1)^n \\
&= 0
\end{aligned}
$$

On a $A - B = 0$. Ainsi $A = B = \dfrac{A+B}{2} = 2^{n-1}$

Réponse de l'exercice 32

Pour $k \geqslant 1$ et $n \in \mathbb{N}$ on sait que $\dfrac{n}{k}\dbinom{n-1}{k-1} = \dbinom{n}{k}$, d'où $\dbinom{n}{k}k = n\dbinom{n-1}{k-1}$. Ainsi

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} k &= \binom{n}{0} 0 + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} k \\
&= \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} n \\
&= n \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} \\
&= n \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} \qquad \text{on fait le changement d'indice } j = k-1 \\
&= n \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} 1^j 1^{n-1-j} \\
&= n 2^{n-1}
\end{aligned}
$$

Pour $k \geqslant 1$ et $n \in \mathbb{N}^*$ on sait que $\dfrac{n}{k}\dbinom{n-1}{k-1} = \dbinom{n}{k}$, d'où, pour $k \geqslant 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$ $\dfrac{n+1}{k+1}\dbinom{n}{k} = \dbinom{n+1}{k+1}$. Ainsi

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{1}{k+1} &= \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{n+1}{k+1} \\
&= \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k+1} \\
&= \frac{1}{n+1} \sum_{j=1}^{n+1} \binom{n+1}{j} \qquad \text{on a fait le changement d'indice } j = k+1 \\
&= \frac{1}{n+1} \left(-\binom{n+1}{0} + \sum_{j=0}^{n+1} \binom{n+1}{j} \right) \\
&= \frac{-1 + 2^{n+1}}{n+1}
\end{aligned}
$$

Réponse de l'exercice 33

1. Colorier le dessin revient à associer une couleur à chaque zone, c'est-à-dire à se donner une application de l'ensemble des zones dans l'ensemble des couleurs. On sait qu'il y a alors 7^5 applications d'un ensemble à 5 éléments dans un ensemble à 7 éléments, c'est-à-dire 7^5 manières de colorier le dessin.
2. On veut ici se donner une liste de 5 couleurs sans répéter deux fois la même couleur, c'est-à-dire une 5-liste sans répétition dans un ensemble à 7 éléments. D'après le cours on sait qu'il y a alors $\dfrac{7!}{(7-5)!} = \dfrac{7!}{2!}$ possibilités.

Réponse de l'exercice 34

1. Un tenue correspond aux choix successifs d'une paire de chaussures (2 choix), d'un pantalon (3 choix), d'une veste (2 choix) et d'un chapeau (2 choix), soit $2 \times 3 \times 2 \times 2 = 24$ choix.
2. On doit ici exclure les tenues qui comportent les chaussures marron avec le pantalon rouge, soit 4 tenues, il reste donc 20 tenues possibles.

Réponse de l'exercice 35

1. Un placement correspond à la liste successive des personnes assises sur chaque chaise, il s'agit évidemment de listes sans répétition, il y a donc $\dfrac{8!}{(8-8)!} = 8!$ placements possibles.
2. On ne s'occupe ici que de la position relative des personnes, « faire tourner »la table ne change alors pas le placement. Si on appelle alors Monsieur A la première personne on peut supposer quitte à « faire tourner la table »qu'il est toujours assis à la place la plus au Nord, on a ensuite 7 choix pour son voisin de droite, puis 6 choix pour la personne à droite dudit voisin, etc. Ce qui nous fait $7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 7!$ placements possibles.
3. Là encore on peut « faire tourner la table », on va alors toujours supposer que Monsieur A est à la place la plus au nord, on a ensuite 4 choix pour sa voisine de droite puis 3 pour le voisin de droite de ladite voisine, en continuant à remplir la table on a successivement 3 choix puis 2 choix, 2 choix et 1 choix. Au final on a $4\times3\times3\times2\times2\times1 = 4!\times3! = 24\times6 = 144$ placements possibles.

Réponse de l'exercice 36

On va compter le nombre de choix possibles pour le triplet (x, y, z). Si cela vous convient mieux, il ne faut pas hésiter à tracer un arbre pour représenter les choix possibles pour x, y et z et compter les branches. On peut dire dès le début qu'un triplet (x, y, z) tel que $x + y + z = n$ est en fait le triplet $(x, y, n - x - y)$, on n'a de latitude que dans le choix de x et y.

Combien de choix pour x ? A priori on peut prendre n'importe quel nombre entier entre 0 et n (car $x \in \mathbb{N}$ et $n - x = y + z \in \mathbb{N}$) ce qui nous fait $(n + 1)$ choix. Un fois x choisi, pour y le nombre de choix possibles dépend de x, on a en effet toujours $y \geqslant 0$ et $y \leqslant n - x$, ce qui nous fait $(n + 1 - x)$ choix. Enfin, une fois x et y choisis on n'a plus qu'un seul pour z : $n - x - y$.

Au total on a alors

$$\sum_{x=0}^{n}(n+1-x) = \sum_{x=0}^{n}(n+1) - \sum_{x=0}^{n} x = (n+1)^2 - \frac{n(n+1)}{2} = \frac{(n+1)(2n+2-n)}{2} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

solutions à cette équation.

Réponse de l'exercice 37

1. Il s'agit de compter les listes sans répétition de 6 éléments (les places possibles des lettres) dans un ensemble à 6 éléments (les lettres du mot Martin). Il y en a donc 6!.
2. On va procéder en deux temps, tout d'abord on va distinguer les deux a de Arnaud, on écrit donc a_1rna_2ud. Maintenant toutes les lettres sont différentes il y a donc 6! anagrammes. Par contre si on ne distingue plus les a il y a des anagramme que l'on a compté deux fois, par exemple na_1drua_2 et na_2dra_1. En pratique on a compté chaque anagramme exactement deux fois (le nombre de manière qu'il y a de permuter les deux a). Il y a donc $\dfrac{6!}{2}$ anagramme du prénom « Arnaud ».
3. On peut procéder de la même manière que pour « Arnaud », on considère que toutes les lettres sont différentes, ce qui nous fait 11! anagrammes et on divise ensuite par le nombre de manières de permuter les i, les s et les p. Ainsi on a $\dfrac{11!}{4! \times 4! \times 2!}$ anagrammes du mot « Mississippi ».

Réponse de l'exercice 38

On va appliquer la formule du triangle de Pascal plusieurs fois. Tout d'abord on a

$$\binom{n-2}{p} + \binom{n-2}{p-1} = \binom{n-1}{p}$$

$$\binom{n-2}{p-1} + \binom{n-2}{p-2} = \binom{n-1}{p-1}$$

Ainsi

$$\begin{aligned}\binom{n-2}{p}+2\binom{n-2}{p-1}+\binom{n-2}{p-2} &= \binom{n-2}{p}+\binom{n-2}{p-1}+\binom{n-2}{p-1}+\binom{n-2}{p-2}\\ &= \binom{n-1}{p}+\binom{n-1}{p-1}\\ &= \binom{n}{p}\end{aligned}$$

Ce qui est bien le résultat voulu.

Réponse de l'exercice 39

On a

$$\begin{aligned}C+D &= \sum_{\substack{k=0\\ k \text{ pair}}}^{n}\binom{n}{k}2^k+\sum_{\substack{k=0\\ k \text{ impair}}}^{n}\binom{n}{k}2^k\\ &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}2^k\\ &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}2^k1^{n-k}\\ &= (2+1)^n\\ &= 3^n\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}C-D &= \sum_{\substack{k=0\\ k \text{ pair}}}^{n}\binom{n}{k}2^k-\sum_{\substack{k=0\\ k \text{ impair}}}^{n}\binom{n}{k}2^k\\ &= \sum_{\substack{k=0\\ k \text{ pair}}}^{n}\binom{n}{k}2^k+\sum_{\substack{k=0\\ k \text{ impair}}}^{n}\binom{n}{k}(-1)\times 2^k\\ &= \sum_{\substack{k=0\\ k \text{ pair}}}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k\times 2^k+\sum_{\substack{k=0\\ k \text{ impair}}}^{n}\binom{n}{k}(-1)^k\times 2^k\\ &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-2)^k\\ &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(-2)^k1^{n-k}\\ &= (-2+1)^n\\ &= (-1)^n\end{aligned}$$

Ainsi $C+D=3^n$ et $C-D=(-1)^n$, d'où

$$C=\frac{3^n+(-1)^n}{2} \qquad D=\frac{3^n-(-1)^n}{2}$$

Réponse de l'exercice 40

On a

$$\begin{aligned}(1+\sqrt{5})^4 &= \binom{4}{0}1^4\sqrt{5}^0+\binom{4}{1}1^3\sqrt{5}^1+\binom{4}{2}1^2\sqrt{5}^2+\binom{4}{3}1^1\sqrt{5}^3+\binom{4}{4}1^0\sqrt{5}^4\\ &= 1+4\sqrt{5}+6\times 5+4\times 5\sqrt{5}+25\\ &= 56+24\sqrt{5}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\sqrt{2}+\sqrt{3})^5 &= \sqrt{2}^5+5\sqrt{2}^4\sqrt{3}+10\sqrt{2}^3\sqrt{3}^2+10\sqrt{2}^2\sqrt{3}^2+5\sqrt{2}\sqrt{3}^4+\sqrt{3}^5\\ &= 4\sqrt{2}+20\sqrt{3}+60\sqrt{2}+60\sqrt{3}+45\sqrt{2}+9\sqrt{3}\\ &= 109\sqrt{2}+89\sqrt{3}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(2+i)^7 &= 2^7+7\times 2^6 i+21\times 2^5 i^2+35\times 2^4 i^3+35\times 2^3 i^4+21\times 2^2 i^5+7\times 2i^6+i^7\\ &= 128+448i-672-560i+280+84i-14-i\\ &= -278-29i\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^6 &= \frac{1}{2^6}\left(1+6i\sqrt{3}+15(i\sqrt{3})^2+20(i\sqrt{3})^3+15(i\sqrt{3})^4+6(i\sqrt{3})^5+(i\sqrt{3})^6\right)\\ &= \frac{1}{2^6}\left(1+6i\sqrt{3}-45-60i\sqrt{3}+135+54i\sqrt{3}-27\right)\\ &= \frac{1}{64}(1-45+135-27)\\ &= 1\end{aligned}$$

Réponse de l'exercice 41

On a

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^n k2^k &= \sum_{k=1}^n\left(\sum_{i=1}^k 1\right)2^k\\ &= \sum_{k=1}^n\sum_{i=1}^k 2^k\\ &= \sum_{i=1}^n\sum_{k=i}^n 2^k\\ &\quad \text{On fait le changement d'indice } j=k-i\\ &= \sum_{i=1}^n\sum_{j=0}^{n-i} 2^{j+i}\\ &= \sum_{i=1}^n 2^i\sum_{j=0}^{n-i}2^j\\ &= \sum_{i=1}^n 2^i(2^{n+1-i}-1)\\ &= \sum_{i=1}^n 2^{n+1}-2^i\\ &= n2^{n+1}-\sum_{i=1}^n 2^i\\ &= n2^{n+1}-2(2^n-1)\\ &= (n-1)2^{n+1}+2\end{aligned}$$

Réponse de l'exercice 42

Ici on va faire ce qu'on appelle des sommations par paquets, c'est-à-dire que l'on va couper des sommes en plusieurs sommes plus faciles à calculer.

Pour la première somme on remarque que $\min(i,j)=j$ si $j\leqslant i$ et i sinon. Ainsi

$$\begin{aligned}
\sum_{(i,j)\in[\![1,n]\!]} \min(i,j) &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\min(i,j)\\
&= \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{i}\min(i,j) + \sum_{j=i+1}^{n}\min(i,j)\right)\\
&= \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{i} j + \sum_{j=i+1}^{n} i\right)\\
&= \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{i(i+1)}{2} + i\sum_{j=i+1}^{n} 1\right)\\
&= \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{i(i+1)}{2} + i(n-i)\right)\\
&= \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{i(i+1+2n-2i)}{2}\right)\\
&= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left(-i^2+(2n+1)i\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(-\sum_{i=1}^{n} i^2 + (2n+1)\sum_{i=1}^{n} i\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(-\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (2n+1)\frac{n(n+1}{2}\right)\\
&= \frac{n(n+1)(2n+1)}{4}\left(-\frac{1}{3}+1\right)\\
&= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}
\end{aligned}$$

Pour la deuxième somme on remarque que $\max(i,j) = i$ si $j \leqslant i$ et j sinon. Ainsi

$$\begin{aligned}
\sum_{(i,j)\in[\![1,n]\!]} \max(i,j) &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\max(i,j)\\
&= \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{i}\max(i,j) + \sum_{j=i+1}^{n}\max(i,j)\right)\\
&= \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{i} i + \sum_{j=i+1}^{n} j\right)\\
&\quad \text{on fait le changement d'indice } k=j-i \text{ dans la seconde somme}\\
&= \sum_{i=1}^{n}\left(i^2 + \sum_{k=1}^{n-i} k+i\right)\\
&= \sum_{i=1}^{n}\left(i^2 + \sum_{k=1}^{n-i} k+(n-i)i\right)\\
&= \sum_{i=1}^{n}\left(i^2 + \frac{(n-i)(n+1-i)}{2}+(n-i)i\right)\\
&= \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{2i^2+i^2-in-i(n+1)+n(n+1)+2(n-i)i}{2}\right)\\
&= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left(i^2-i+n(n+1)\right)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{2}\left(\sum_{i=1}^{n} i^2 - \sum_{i=1}^{n} i + n^2(n+1)\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{n(n+1}{2} + n^2(n+1)\right)\\
&= \frac{n(n+1)}{2}\left(\frac{2n+1-3+6n}{6}\right)\\
&= \frac{n(n+1)}{2}\left(\frac{8n-2}{6}\right)\\
&= \frac{n(n+1)(4n-1)}{6}
\end{aligned}
$$

Pour la troisième somme on remarque que $|i-j| = i-j$ si $j \leqslant i$ et $j-i$ sinon. Ainsi

$$
\begin{aligned}
\sum_{(i,j)\in[\![1,n]\!]} |i-j| &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} |i-j|\\
&= \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{i} |i-j| + \sum_{j=i+1}^{n} |i-j|\right)\\
&= \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{i} (i-j) + \sum_{j=i+1}^{n} (j-i)\right)\\
&= \sum_{i=1}^{n}\left(i^2 - \sum_{j=1}^{i} j + \sum_{j=i+1}^{n} (j-i)\right)\\
&\quad \text{on fait le changement d'indice } k=j-i \text{ dans la seconde somme}\\
&= \sum_{i=1}^{n}\left(i^2 - \frac{i(i+1)}{2}\sum_{k=1}^{n-i} k\right)\\
&= \sum_{i=1}^{n}\left(i^2 - \frac{i(i+1)}{2} + \frac{(n-i)(n+1-i)}{2}\right)\\
&= \frac{1}{2}\sum_{i=1} n\left(2i^2 - i^2 - i + i^2 - ni - (n+1)i + n(n+1)\right)\\
&= \frac{1}{2}\sum_{i=1} n\left(2i^2 - (2n+2)i + n(n+1)\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(2\sum_{i=1} ni^2 - (2n+2)\sum_{i=1} ni + n(n+1)\sum_{i=1} n1\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(2\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} - (2n+2)\frac{n(n+1}{2} + n^2(n+1)\right)\\
&= \frac{1}{6}\left(n(n+1)(2n+1) - 3n(n+1)^2 + 3n^2(n+1)\right)\\
&= \frac{n(n+1)}{6}(2n+1-3n-3+3n)\\
&= \frac{n(n+1)(2n-2)}{6}
\end{aligned}
$$