Feuille d'exercices 10 : dénombrement

I Cardinal d'un ensemble, produit cartésien et p-liste (avec répétition).

Exercice 1

Vous pourrez répondre aux questions sans justifier.

a) Nombre de nombres entiers entre 0 et 999.

b) Nombre d'éléments de l'ensemble $[\![0,9]\!]^3$. (On appellera ce nombre le " **cardinal** " de $[\![0,9]\!]^3$ et on le notera $\text{Card}([\![0,9]\!]^3)$).

c) Nombre de nombres entiers entre 0 et 999, n'ayant ni 5 ni 7.

d) Nombre d'éléments de l'ensemble $\{0,1,2,3,4,6,8,9\}^3$.

e) Nombre de mots de 4 lettres possibles en utilisant que les 6 voyelles. (c'est-à-dire : Nombre d'éléments de $\{a,e,i,o,u,y\}^4$)

f) Soit $(n,p) \in (\mathbb{N}^*)^2$. On considère un ensemble E constitué de n éléments. Déterminer le nombre d'éléments de E^p. (Chaque élément de E^p sera appelé une **p-liste** de E)

g) Donner un élément quelconque de $\{0,1,2\} \times \{3,4\} \times \{5,6,7,8,9\}$. Déterminer :

$$\text{Card}\left(\{0,1,2\} \times \{3,4\} \times \{5,6,7,8,9\}\right)$$

h) Soit A et B deux ensembles non-vides finis. Déterminer :

$$\text{Card}(A \times B)$$

i) Plus généralement soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $(A_1, \cdots A_n)$ une famille d'ensembles non vides finis. Déterminer

$$\text{Card}(A_1 \times \cdots \times A_n)$$

Exercice 2

On considère l'ensemble $E = [\![1,20]\!]$. A et B deux sous-ensembles de E constitués respectivement des nombres pairs et des multiples de 3. On note $\overline{B}$ le complémentaire de b dans E.

Donnez sans justifier (ou presque) les valeurs de :

a) $\text{Card}(E)$

b) $\text{Card}(B)$

c) $\text{Card}(\overline{B})$

d) $\text{Card}(A)$

e) $\text{Card}(A \cap B)$

f) $\text{Card}(A \cup B)$

Exercice 3

Vous disposez de 10 paires de chaussettes différentes que vous voulez ranger dans 4 tiroirs.

De combien de manières différentes pouvez-vous le faire ?

Exercice 4

On considère deux ensembles E et F finis de cardinal respectifs n et p.

Déterminer le nombre d'applications de E dans F.

II p-liste sans répétition et permutation.

Exercice 5

a) 10 amis font la course pour arriver au sommet du Pic du midi d'Ossau. On veut déterminer le nombre de podiums possibles (Les trois premiers seulement, on parlera alors de **3-liste sans répétition** d'un ensemble à 10 éléments)

b) Cette fois on s'intéresse au classement des 10 participants. Donner le nombre de classements possibles. (On parlera du nombre de **permutation** de l'ensemble constitué des 10 participants.)

c) On considère cette fois-ci qu'il y a n participants. Déterminer le nombre de podiums possibles, puis comme précédemment le nombre de classements possibles (de tous les participants).

d) Pour n participants maintenant, on classe les p premiers participants. Déterminer le nombre de p-listes sans répétition de ces n participants.

Exercice 6

On rappelle qu'une injection de E dans F est une application dont chaque élément de F a au plus 1 antécédent. On notera $\mathcal{I}(E, F)$ l'ensemble des injections de E dans F. On a $\varphi : E \to F$ injective si

$$\forall (x, x') \in E^2, \quad f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$$

1. On considère $E = [\![1; 2]\!]$ et $F = [\![1; 4]\!]$. Déterminer $\text{Card}\,(\mathcal{I}(E, F))$.
2. On considère E et F deux ensembles finis de cardinal respectif p et n. Déterminer $\text{Card}\,(\mathcal{I}(E, F))$.

III Combinaisons.

Exercice 7

Un groupe d'amis sont dans un camping : Albert, Bertrand, Colin, Didier et Éliot.

Certains doivent aller faire des courses au village d'à côté.

Vous pourrez répondre aux questions suivantes sans justifier.

Soit $p \in [\![0, 5]\!]$.

On cherche de combien de façons on peut désigner p d'entre eux pour aller faire les courses.

Par exemple pour p=1. Il y a 5 façons : soit Albert, soit Bertrand, ..., soit Éliot. Chacune des ces sous-parties de l'ensemble $E = \{Albert, Bertrand, Colin, Didier, Eliot\}$ est appelée une **1-combinaison** de l'ensemble E.

Déterminer ce nombre p-combinaison pour :

a) p=2 b) p=3 c) p=4 d) p=5

Exercice 8

Soit E un ensemble à n éléments avec $n \in \mathbb{N}$ et $n \geq 2$. Soit $p \in \mathbb{N}$. On décide de noter C_n^p le nombre de p-combinaisons de l'ensemble E. (c'est-à-dire le nombre de sous-parties de E à p éléments) **Attention notation non conventionnelle**

1. Déterminer C_n^0.
2. Déterminer C_n^1.
3. Déterminer C_n^2.
4. On choisit un élément a de E. Soit $p \in [\![1; n-1]\!]$.
   (a) Parmi les réponses possibles ci-dessous laquelle représente le nombre de sous-parties à p éléments **contenant** l'élément a.

   i. C_n^p ii. C_n^{p-1} iii. C_{n-1}^p iv. C_{n-1}^{p-1}

   (b) Parmi les réponses possibles ci-dessous laquelle représente le nombre de sous-parties à p éléments **ne contenant pas** l'élément a.

   i. C_n^p ii. C_n^{p-1} iii. C_{n-1}^p iv. C_{n-1}^{p-1}

5. Déduire de la question précédente, la relation :

$$C_n^p = C_{n-1}^{p-1} + C_{n-1}^p$$

   Cette relation vous rappelle-t-elle une formule déjà vue ?

6. Montrer par récurrence que $\forall (n, p) \in \mathbb{N}^2 : \quad C_n^p = \dfrac{n!}{(n-p)!p!}$.

   On notera :

$$\mathcal{P}_n : \forall p \in [\![0, n]\!],\ C_n^p = \frac{n!}{(n-p)!p!}$$

7. On peut retrouver l'expression de C_p^n en utilisant le nombre de p-liste sans répétition.
   (a) Donner le nombre de permutation d'une p-liste sans répétition de E.
   (b) En déduire que $C_n^p = \dfrac{\text{nb de p-liste sans répétition de E}}{p!} = \dfrac{n!}{(n-p)!p!} = \dbinom{n}{p}$

On notera dorénavant $\dbinom{n}{p}$ le nombre de p-combinaisons de l'ensemble E (et non C_n^p notation devenue obsolète)

Exercice 9

1. Déterminer le nombre de fonctions indicatrices de E (c'est-à-dire le nombre d'applications de E dans $\{0;1\}$, l'ensemble $\mathcal{A}(E;\{0;1\})$
2. On considère

$$\begin{array}{cccc} \varphi & : & \mathcal{P}(E) & \to & \mathcal{A}(E;\{0;1\} \\ & & A & \mapsto & \mathbb{1}_A \end{array}$$

   Montrer que φ est bijective. En déduire $\text{Card}(\mathcal{P}(E))$.

IV Exercice en Vrac.

Exercice 10

On considère l'ensemble $E = [\![1, 10]\!]$. Donner :
a) le nombre de 3-listes de E ;
b) le nombre de 3-listes sans répétition de E ;
c) le nombre de parties de E à 3 éléments ;
d) le nombre de permutations de E ;
e) le nombre de sous-ensembles de E.

Exercice 11

Soit E l'ensemble des nombres à quatre chiffres ne comportant aucun 9. Calculer :
a) le cardinal de E ;
b) le nombre d'éléments pairs de E ;
c) le nombre d'éléments de E qui ont quatre chiffres différents ;
d) le nombre d'éléments de E qui sont multiples de 5.

Exercice 12

On appelle mot toute suite de lettres, qu'elle ait un sens ou non.
a) Combien de mots de deux lettres existe-t-il ?
b) Combien de mots de deux lettres identiques existe-t-il ?
c) Combien de mots de deux lettres différentes existe-t-il ?
d) Combien de mots de deux lettres ont leurs lettres dans l'ordre alphabétique ?
e) Combien de mots de six lettres ne contenant que des a et des b existe-t-il ?
f) Combien de mots de six lettres contenant deux a et quatre b existe-t-il ?

Exercice 13

Combien peut-on attribuer de numéros de téléphone fixe en France sachant que :
• les numéros « classiques » commencent par 01, 02, 03, 04 ou 05 (indicatif de région) et les deux chiffres suivants sont distincts ;
• les numéros de « box » commencent par 09, les autres chiffres sont quelconques.

Exercice 14

Dans un lycée de 1 200 élèves, 652 pratiquent une activité sportive, 327 jouent d'un instrument de musique et 453 ne font ni sport, ni musique. Déterminer le nombre d'élèves à la fois sportifs et musiciens.

Exercice 15

Quel doit être le nombre minimum d'habitants dans un village pour être certain que deux personnes (au moins) possèdent les mêmes initiales ?

Exercice 16

On tire simultanément k boules d'une urne qui contient n boules blanches et une noire.
a) Quel est le nombre total de tirages possibles ?
b) Combien y a-t-il de tirages sans la boule noire ?
c) Combien y a-t-il de tirages avec la boule noire ?

Exercice 17

Lors d'un repas de classe un jeudi soir, les élèves de BCPST1 du lycée Barthou trinquent. Combien entend-on de tintements de verres ?

Exercice 18

On souhaite ranger n dossiers numérotés de 1 à n dans n tiroirs également numérotés de 1 à n, en plaçant un dossier par tiroir. Déterminer :
a) le nombre total de rangements possibles ;
b) le nombre de rangements tels que le dossier 1 soit dans le tiroir 1.

Exercice 19

Combien y-a-t-il d'anagrammes du mot « liste » ?
Du mot « PROCREEE » ? Du mot « intergouvernementalisations » ?

Exercice 20

Un ensemble E possède exactement 55 parties à deux éléments. Quel est le cardinal de cet ensemble ?

Exercice 21

Nombre de diagonales.
On considère un polygone convexe à n sommets ($n \geq 3$).
a) Déterminer le nombre de diagonales de ce polygone.
b) Quels sont les polygones qui possèdent autant de diagonales que de côtés ?

Exercice 22

On considère un quadrillage de n cases sur n cases.
Quel est le nombre total de carrés dans ce quadrillage ?

Exercice 23

Soit E un ensemble fini de cardinal n. Calculer la somme des cardinaux de toutes les parties de E.

Exercice 24

Loto Foot.
Au Loto Foot 7, le joueur remplit une grille dans laquelle il indique ses pronostics pour 7 matchs de football à venir. Pour chacun des matchs, il peut cocher une des 3 cases au choix :

- $\boxed{1}$ pour une victoire de l'équipe qui reçoit
- $\boxed{N}$ pour un match nul
- $\boxed{2}$ pour une victoire de l'équipe qui se déplace

a) De combien de façons différentes un joueur peut-il remplir la grille ?
b) Combien existe-t-il de grilles dans lesquelles tous les pronostics sont faux ?

c) Combien existe-t-il de grilles avec exactement trois pronostics corrects ?

d) Pour gagner, il faut avoir trouvé au moins 6 pronostics exacts. Quel est le nombre de grilles gagnantes ?

Exercice 25

Formule de Vandermonde.
Dans une classe de BCPST, il y a N_1 filles et N_2 garçons. On veut former une équipe de n joueurs de la classe pour un sport collectif.
a) Combien peut-on former d'équipes différentes ?
b) Pour $k \in [\![0, n]\!]$ fixé, combien peut-on former d'équipes avec exactement k filles ?
c) À l'aide des questions précédentes, démontrer la formule de Vandermonde :

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{N_1}{k}\binom{N_2}{n-k} = \binom{N_1+N_2}{n}.$$

d) En déduire que l'on a :

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}.$$

Exercice 26

1. On considère une urne avec 10 boules blanches, 7 rouges et 3 noires. Déterminer le nombre de façons de choisir 6 boules avec exactement 3 blanches, 2 rouge et 1 noire.
2. Montrer que :

$$\sum_{k=0}^{6}\sum_{l=0}^{6-k} \binom{10}{k}\binom{7}{l}\binom{3}{6-k-l} = \binom{20}{6}$$

3. Soit $N = N_1 + N_2 + N_3$. Soit $n \in [\![0; n]\!]$. Montrer que :

$$\sum_{k=0}^{n}\sum_{l=0}^{n-k} \binom{N_1}{k}\binom{N_2}{l}\binom{N_3}{n-k-l} = \binom{N}{n}$$

Exercice 27

Un peu de poker.
Dans un jeu de 52 cartes, on choisit simultanément 5 cartes. Ces cinq cartes sont appelées une « main ».
a) Déterminer le nombre total de mains.
b) Déterminer le nombre de mains qui contiennent les 4 rois.
c) Déterminer le nombre de mains qui contiennent exactement un roi.
d) Déterminer le nombre de mains qui contiennent au moins un roi.
e) Déterminer le nombre de mains qui contiennent un brelan de rois (trois rois exactement).
f) Déterminer le nombre de mains qui contiennent le roi de cœur et au moins un trèfle.
g) Déterminer le nombre de « couleurs » (cinq cartes de la même couleur).
h) Déterminer le nombre de « full » (un brelan et une paire).