BCPST1 **année 2019-2020**

Feuille d'exercices 9 : fonctions usuelles

Exercice 1. On considère la fonction f définie par :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{-3}{x^2+1}+5 \end{array}$$

On note $\mathscr{C}_f$ la représentation graphique de f.

1. Variation et encadrement.
   (a) Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^+$ vérifiant $0 \leqslant a \leqslant b$. Montrer que $2 \leqslant f(a) \leqslant f(b)$. En déduire la monotonie de f sur $\mathbb{R}^+$.
   (b) Faire de même pour $\mathbb{R}^-$ (avec $a \leqslant b \leqslant 0$).
   (c) Déterminer les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$.
   (d) Déduire des questions précédentes un minimum pour la fonction f.
   (e) Montrer que :
   $$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \leqslant 5$$
   f admet-elle un majorant, un maximum.
2. Propriétés graphiques.
   (a) Montrer que
   $$\forall x \in \mathbb{R}, f(-x) = f(x)$$
   (b) Soit $a \in \mathbb{R}^+$. Que peut-on dire des points M et N de $\mathscr{C}_f$ d'abscisse respectif a et $-a$.

Exercice 2. 1. On définie la fonction $\mathbb{1}_{[0;1]}$ par :

$$\mathbb{1}_{[0;1]} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} 1 \text{ si } x \in [0;1] \\ 0 \text{ sinon} \end{cases} \end{array}$$

Faire rapidement une représentation graphique de $\mathbb{1}_{[0;1]}$.
La fonction précédente sera appelée la fonction indicatrice de l'intervalle $[0;1]$.

2. On peut définir la fonction *abs* sur $\mathbb{R}$ par
$$\forall x \in \mathbb{R},\ abs(x) = -x \times \mathbb{1}_{]-\infty;0[}(x) + x \times \mathbb{1}_{[0;+\infty[}(x)$$
Faire une représentation rapide de *abs*.
3. Sur $\mathbb{R}$, on peut définir la fonction $E = \sum\limits_{n=-3}^{2} n \times \mathbb{1}_{[n;n+1[}$.
   (a) Faire une représentation rapide de E sur $\mathbb{R}$.
   (b) Maintenant on définie E sur $\mathbb{R}$ par $E = \sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} n \times \mathbb{1}_{[n;n+1[}$. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R},\ x-1 < E(x) \leqslant q < E(x)+1$.

Exercice 3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère la fonction polynômiale f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$$

a. Simplifier l'expression de f en utilisant le binôme de Newton.
b. Déterminer de deux façon l'expression de $f'(x)$.
c. En déduire $\sum\limits_{k=0}^{n} k \dbinom{n}{k}$

Exercice 4. Résoudre les équations suivantes :'

a) $\ln(x^2-1) + \ln 4 = \ln(4x-1)$
b) $\ln x + \ln(11-x) = \ln(2x^2)$
c) $2^{x^2} = 3^{x^3}$
d) $e^x + 3e^{-x} = 4$
e) $x^{\sqrt{x}} = (\sqrt{x})^x$
f) $\sqrt{x} + \sqrt[3]{x} = 2$

Exercice 5. Résoudre les inéquations suivantes :

a) $2^x > 3^x$; *b)* $e^{x^2}e^x < e^6$; *c)* $\frac{1}{2}\ln(5x-1) \leqslant \ln(x+1)$; *d)* $2^{x+1}+8 \geqslant 4^x$.

Exercice 6. Résoudre le système d'équations suivant : $\begin{cases} x+y=7 \\ \log x + \log y = 1 \end{cases}$.

Exercice 7. En regroupant les puissances de 2 et les puissances de 3, résoudre l'équation suivante :

$$2^{2x} - 3^{x-\frac{1}{2}} = 3^{x+\frac{1}{2}} - 2^{2x-1}.$$

Exercice 8. Démontrer les inégalités suivantes :

$$1)\ \forall x \geqslant 0,\ x - \frac{x^3}{6} \leqslant \sin x \leqslant x$$
$$2)\ \forall x > 0,\ \ln x \leqslant x - 1$$

Exercice 9. On pose $f(x) = |x-3| - |2x+1|$.
1) Déterminer l'ensemble de définition $\mathcal{D}$ de la fonction f.
2) Simplifier, selon les valeurs de x, l'expression de $f(x)$.
3) Tracer la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.

Exercice 10. Étudier la fonction f définie par :

$$f(x) = \frac{\ln x - x^2 - 1}{x}.$$

Exercice 11. Étudier la fonction f définie par $f(x) = \cos x + \frac{1}{2}\cos 2x$.
On commencera par justifier qu'il suffit d'étudier f sur l'intervalle $[0, \pi]$.

Exercice 12. Fonctions cosinus et sinus hyperbolique.
On définit les fonctions cosinus et sinus hyperbolique, notées respectivement ch et sh en posant :

$$\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \text{et} \quad \operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

1) Déterminer l'ensemble de définition $\mathcal{D}$ des fonctions ch et sh. Étudier la parité de ces fonctions.
2) Calculer les limites de ces fonctions aux bornes de $\mathcal{D}$.
3) Vérifier que les fonctions ch et sh sont dérivables sur $\mathcal{D}$, puis calculer leur dérivée.
4) Étudier les variations des fonctions ch et sh.
5) Tracer la courbe représentative de ces fonctions dans un repère orthonormé.
6) Démontrer que, pour tout réel x, $\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1$.
7) Soit $x \in \mathbb{R}$. Établir les relations :

$$\operatorname{ch} 2x = \operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 x \qquad \text{et} \qquad \operatorname{sh} 2x = 2\operatorname{sh} x \operatorname{ch} x\,.$$

8) Résoudre l'équation $5\operatorname{ch} x - 4\operatorname{sh} x = 3$.

Exercice 13. Résoudre le système *non linéaire* suivant :

$$\begin{cases} x^2\sqrt{y}\,z = 6\sqrt{2} \\ \sqrt{x}\,y\,z^3 = 27\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \dfrac{x^3z^2}{y} = 144 \end{cases}$$

Exercice 14. Étudier les fonctions :

a) $f(x) = \frac{1}{3}\sin(3x) - \frac{1}{2}\sin(2x)$
b) $g(x) = \sin x(1 - cosx)$
c) $h(x) = \sqrt{2}x + 2\sin x$
d) $v(x) = \sin^2 x \times \cos(2x)$