Feuille d'exercices : Nombres complexes.

Exercice 1. On considère l'ensemble :

$$E = \left\{a + b\sqrt{2}, (a,b) \in \mathbb{Q}\right\}$$

Pour un élément $z = a + b\sqrt{2}$, on note $C(z) = a$ (on dira le "c" de z) et $D(z) = b$ (on dira le "c" de z)

1. Soient $z = a + b\sqrt{2}$ et $z' = a' + b'\sqrt{2}$ deux éléments de E. Montrer que $z + z'$ est un élément de E. Déterminer $C(z + z')$ et $D(z + z')$.
2. Soient $z = a + b\sqrt{2}$ et $z' = a' - b'\sqrt{2}$ deux éléments de E. Montrer que $z - z'$ est un élément de E. Déterminer $C(z - z')$ et $D(z - z')$.
3. Soient $z = a + b\sqrt{2}$ et $z' = a' + b'\sqrt{2}$ deux éléments de E. Montrer que zz' est un élément de E. Déterminer $C(zz')$ et $D(zz')$.
4. Soient $z = a + b\sqrt{2}$ et $z' = a' + b'\sqrt{2}$ deux éléments de E. Montrer que z/z' est un élément de E. Déterminer $C(z/z')$ et $D(z/z')$.
5. Soit $z = a + b\sqrt{2}$ un élément de E. On note $\overline{z} = a - b\sqrt{2}$. Montrer que $D(z \times \overline{z}) = 0$

Exercice 2. On suppose maintenant l'existence d'un ensemble de nombre plus grand que $\mathbb{R}$, dans lequel il existe un nombre i tel que $i^2 = -1$.

Dans cet ensemble, on considère l'ensemble :

$$E = \{a + bi, (a,b) \in \mathbb{R}\}$$

Pour un élément $z = a + bi$, on note $\mathrm{Re}(z) = a$ (On lira "partie réel" de z) et $\mathrm{Im}(z) = b$ (On lira partie imaginaire de z)

1. En utilisant le fait que $i^2 = -1$, simplifier les expressions suivantes (en les mettant sous la forme $a + ib$) :
   (a) $(2 - 3i)(5 - i)$
   (b) $(2 - 3i)^2$
   (c) $i(4 + 3i) + 2i(8i - 1)$
   (d) $\dfrac{4 - i}{i}$
   (e) $\dfrac{2 - 3i}{5 - i}$
2. Soient $z = a + bi$ et $z' = a' + b'i$ deux éléments de E. Montrer que $z + z'$ est un élément de E. Déterminer $\mathrm{Re}(z + z')$ et $\mathrm{Im}(z + z')$.
3. Soient $z = a + bi$ et $z' = a' - b'i$ deux éléments de E. Montrer que $z - z'$ est un élément de E. Déterminer $\mathrm{Re}(z - z')$ et $\mathrm{Im}(z - z')$.
4. Soient $z = a + bi$ et $z' = a' + b'i$ deux éléments de E. Montrer que zz' est un élément de E. Déterminer $\mathrm{Re}(zz')$ et $\mathrm{Im}(zz')$.
5. Soient $z = a + bi$ et $z' = a' + b'i$ deux éléments de E. Montrer que z/z' est un élément de E. Déterminer $\mathrm{Re}(z'/z)$ et $\mathrm{Im}(z'/z)$.
6. Soit $z = a + bi$ et $z' = a' + b'i$ un élément de E. On note $\overline{z} = a - bi$.
   (a) Déterminer $z\overline{z'}$
   (b) Montrer que $\mathrm{Im}(z \times \overline{z}) = 0$