INP de Toulouse **Prépa**

Semestre 4 spécialité Mécanique

Suites et séries de fonctions

Travaux dirigés

1 Les différents types de convergence

Exercice 1. Étudier la convergence simple des suites de fonctions suivantes :

1. $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \dfrac{x}{n}$,
2. $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}, \quad f_n(x) = x^n$,
3. $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \dfrac{x}{n+|x|}$, $n \in \mathbb{N}^*$
4. $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f_n(x) = n\sin(\dfrac{x}{n})$,
5. $f_n : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \dfrac{n}{1+nx}$,
6. $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \dfrac{1}{1+x^2}\,\chi_{[-n,n]}(x)$, où $\chi_{[-n,n]}$ est la fonction indicatrice de $[-n,n]$,
7. $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \dfrac{1}{n}\chi_{[-n,n]}(x)$,
8. $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} x^k$.

Exercice 2. On considère les fonctions $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$, croissantes. On suppose que la suite $(f_n)_n$ converge simplement vers f sur $[a,b]$. Montrer que f est croissante.

On suppose de plus que les f_n sont strictement croissantes. Est-ce que f est strictement croissante ?

Exercice 3. On pose $f_n(x) = \dfrac{\sin nx}{n}$. Montrer que la suite $(f_n)_{n\geq 1}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers la fonction nulle.

Exercice 4. On pose $f_n(x) = \dfrac{x}{n}$. Montrer que la suite $(f_n)_n$ converge uniformément sur $[-R,R]$ pour tout $R > 0$. Montrer que cette suite ne converge pas uniformément sur $\mathbb{R}$.

Exercice 5. Pour $x \in [0,1[$, on pose $f_n(x) = x^n$. Montrer que pour tout $a \in [0,1[$, la suite $(f_n)_n$ converge uniformément sur $[0,a]$ vers la fonction nulle.

Calculer la limite de $f_n(1-\frac{1}{n})$ lorsque n tend vers $+\infty$. La suite $(f_n)_n$ converge-t-elle uniformément sur $[0,1[$?

Exercice 6. Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$. On pose $f_n(x) = f(x)\chi_{[0,n]}(x)$.

a. Montrer que la suite $(f_n)_n$ converge simplement vers f lorsque n tend vers $+\infty$.

b. On suppose que $f(x)$ tend vers zéro lorsque x tend vers $+\infty$. Montrer que la suite $(f_n)_n$ converge uniformément vers f sur $\mathbb{R}^+$.

Exercice 7. Pour $x \geq 0$ et $n \geq 1$, on pose $f_n(x) = \left(1 - \dfrac{x}{n}\right)^n \chi_{[0,n]}(x)$.

a. On pose, pour $x \in \mathbb{R}^+$, $u_n(x) = f_n(x) - e^{-x}$. Soit $a \in [0, n]$. Montrer que si $u_n'(a) = 0$, alors $u_n(a) = -\frac{a}{n}e^{-a}$. Calculer $\alpha_n = \max\limits_{t \in [0,n]} \dfrac{t}{n} e^{-t}$.

b. En déduire que $\|u_n\|_\infty \leqslant \dfrac{\mathrm{e}^{-1}}{n}$.

c. Montrer que la suite $(f_n)_n$ converge uniformément sur $\mathbb{R}^+$ vers la fonction $x \mapsto e^{-x}$.

Exercice 8. Pour $n \geq 3$, on définit $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ par :

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 \ \text{ si } 0 \leq x \leq \frac{1}{2} - \frac{1}{n}, \\ \\ \frac{n}{2}(x - \frac{1}{2} + \frac{1}{n}) \ \text{ si } \frac{1}{2} - \frac{1}{n} \leq x \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{n}, \\ \\ 1 \ \text{ si } \frac{1}{2} + \frac{1}{n} \leq x \leq 1. \end{cases}$$

a. Dessiner l'allure du graphe des fonctions f_n.

b. Étudier la convergence simple de la suite $(f_n)_n$.

c. Montrer que la suite $(f_n)_n$ converge localement uniformément sur $[0,1] \setminus \{\frac{1}{2}\}$, mais qu'elle ne converge pas uniformément sur $[0,1]$.

2 Propriétés de la fonction limite

Exercice 9. On considère des fonctions $f_n : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$. On suppose que pour tout n, $f_n(x)$ tend vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$. On suppose de plus que la suite de fonctions $(f_n)_n$ converge vers une fonction $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ uniformément sur $\mathbb{R}^+$.

Montrer que $f(x)$ tend vers zéro lorsque x tend vers $+\infty$.

Exercice 10. On considère des fonctions $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}^+$, décroissantes. On suppose que la suite $(f_n)_n$ converge simplement sur $[a,b]$ vers la fonction nulle. Montrer que la convergence est uniforme. Le résultat reste-t-il vrai si on remplace $[a,b]$ par $\mathbb{R}$?

Exercice 11. Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions bornées définies sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans $\mathbb{R}$, qui converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers f. Montrer que f est bornée. Le résultat reste-t-il vrai si l'on suppose uniquement que la convergence est simple ?

Exercice 12. On considère les fonctions $(f_n)_n : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ définies par $f_n(x) = \dfrac{nx}{1+nx}$.

a. Montrer que la suite $(f_n)_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}^+$ vers une fonction f que l'on caractérisera.

b. Étudier la continuité des f_n et de f. Que peut-on en déduire concernant la convergence uniforme ?

c. Montrer que pour tout $a > 0$, la suite f_n converge vers f uniformément sur $[a, +\infty[$.

3 Suite de fonctions et dérivation.

Exercice 13. On pose $u_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}$.

a. Montrer que la suite $(u_n)_n$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers une fonction u que l'on déterminera.

b. Étudier la convergence de la suite des dérivées $(u'_n)_n$.

c. Montrer que u n'est pas dérivable en zéro. Commentaires ?

4 Suites de fonctions et intégration : interversion.

Exercice 14. On considère la suite des fonctions $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ définies par :

$$f_n(x) = x(1 + \sqrt{n}e^{-nx}).$$

a. Montrer que la suite $(f_n)_n$ converge uniformément sur $[0,1]$ vers une limite que l'on précisera.

b. Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 x(1 + \sqrt{n}e^{-nx})\, dx$.

Exercice 15. Calculer, en justifiant les calculs, les limites suivantes :

1. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^2 \ln\left(e^x + \frac{x}{n}\right) dx$,
2. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^\pi \sin^n x\, dx$,
3. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\frac{x}{n}}}{1+x^2}\, dx$,
4. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^n \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n e^{-2x} dx$,
5. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 nx(1-x)^n\, dx$,

5 Retour au définition (est-ce judicieux ? ?)

Exercice 16. On considère les fonctions $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$, croissantes. On suppose que la suite $(f_n)_n$ converge simplement sur $[a,b]$ vers une fonction continue f. On veut montrer que la convergence est uniforme (Théorème de Dini).

a. On fixe $\varepsilon > 0$. Montrer qu'il existe $\eta > 0$ tel que

$$\forall\, x \in [a,b],\ \forall\, y \in [a,b], \quad |x - y| \leq \eta \Longrightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon.$$

b. Soit $N \in \mathbb{N}^*$ tel que $\dfrac{b-a}{\eta} \leq N$. On note $a_k = a + k\dfrac{b-a}{N}$. Montrer que :

$$\forall\, x \in [a,b],\ \exists\, k \in \{0, \dots N-1\}, \quad x \in [a_k, a_{k+1}] \subset [a,b]$$

c. Montrer qu'il existe n_0 tel que

$$\forall\, n \geq n_0,\ \forall\, k \in \{0, \dots, N\}, \quad |f_n(a_k) - f(a_k)| \leq \varepsilon.$$

d. Soit $k \in \{0, \dots, N-1\}$. Soit $x \in [a_k, a_{k+1}]$. Montrer que

$$|f(x) - f_n(x)| \leq |f(x) - f(a_k)| + |f(a_k) - f_n(a_k)| + |f_n(a_{k+1}) - f_n(a_k)|.$$

e. Soit $k \in \{0, \dots, N\}$. Montrer que

$$|f_n(a_{k+1}) - f_n(a_k)| \leq |f_n(a_{k+1}) - f(a_{k+1})| + |f(a_{k+1}) - f(a_k)| + |f(a_k) - f_n(a_k)|.$$

f. Déduire de ce qui précède que pour tout $n \geq n_0$, pour tout $x \in [a, b]$,

$$|f_n(x) - f(x)| \leq 5\varepsilon.$$

Conclusion ?

g. Le résultat est-il vrai si f n'est pas supposée continue ?

Exercice 17. On considère la suite des fonctions $f_n : [a, b] \to \mathbb{R}$ telles que :

$$\exists\, M,\ \forall\, (x, y) \in [a, b]^2,\ \forall\, n,\ |f_n(x) - f_n(y)| \leq M|x - y|.$$

On suppose que la suite $(f_n)_n$ converge simplement vers f.

a. Montrer que f vérifie :

$$\forall\, (x, y) \in [a, b]^2,\ |f(x) - f(y)| \leq M|x - y|.$$

b. Montrer que la convergence est uniforme.

6 Suites de polynômes et Théorème de Weierstrass

Exercice 18. On considère une suite de polynômes $(P_n)_n$ qui converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers f.

a. En écrivant le critère de Cauchy, montrer qu'il existe n_0 tel que pour n et m supérieurs à n_0, $P_n - P_m$ est une constante.

b. On note $a_n = P_n - P_{n_0}$. Montrer que la suite $(a_n)_n$ converge dans $\mathbb{R}$.

c. En déduire que f est un polynôme.

Exercice 19. On rappelle le théorème de Weierstrass :

Théorème. *Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, continue. Il existe une suite de fonctions polynomiales $(u_n)_n$ qui converge uniformément vers f sur $[a, b]$.*

On considère une fonction g, continue sur $[a, b]$, telle que

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ \int_a^b g(t) t^n dt = 0.$$

a. Montrer que pour tout polynôme P, on a

$$\int_a^b g(t) P(t) dt = 0.$$

b. En utilisant le théorème de Weiestrass, montrer que

$$\int_a^b |g(t)|^2 dt = 0.$$

c. En utilisant la continuité et la positivité de la fonction $t \mapsto |g(t)|^2$, montrer que g est la fonction nulle (on raisonnera par l'absurde, en remarquant que si $g(t_0) \neq 0$, alors g est non nulle dans un voisinage de t_0).

Exercice 20. Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, continue. On peut montrer que

$$\lim_{n \to +\infty} \int_a^b f(t) \sin nt\, dt = 0.$$

a. On fixe $\varepsilon > 0$. En utilisant le théorème de Weierstrass, montrer qu'il existe un polynôme g tel que :

$$\forall\, t \in [a,b],\ |f(t) - g(t)| \leq \varepsilon.$$

b. Grâce à une intégration par parties, montrer que

$$\int_a^b g(t) \sin nt\, dt \to 0 \text{ quand } n \to 0.$$

c. En écrivant que

$$\left|\int_a^b f(t) \sin nt\, dt\right| \leq \left|\int_a^b (f(t) - g(t)) \sin nt\, dt\right| + \left|\int_a^b g(t) \sin nt\, dt\right|,$$

montrer que pour n assez grand,

$$\left|\int_a^b f(t) \sin nt\, dt\right| \leq (b - a + 1)\varepsilon.$$

d. Conclure.

Exercice 21. On considère la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} f_n(x)$, avec $f_n(x) = \dfrac{x}{n} e^{-nx}$.

a. Montrer que cette série converge normalement sur $\mathbb{R}^+$.

b. Montrer que la somme de la série, notée S est continue sur $\mathbb{R}^+$.

c. Montrer que pour tout $a > 0$, la série de terme général $f_n'(x)$ est normalement convergente sur $[a, +\infty[$.

d. Montrer que S est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$.

7 Série de fonctions

Exercice 22. On considère la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(nx)}{n^3}$.

a. Montrer que cette série est normalement convergente sur $\mathbb{R}$. On note S sa somme.

b. Montrer que S est continue sur $\mathbb{R}$.

c. Montrer que S est dérivable sur $\mathbb{R}$.

Exercice 23. On considère la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{n^2+x^2}$.

a. Montrer qu'il y a convergence simple sur $\mathbb{R}^+$, et convergence uniforme sur $[0, A]$ pour tout $A > 0$.

b. Montrer que

$$\sum_{n=k}^{2k} \frac{k}{n^2+k^2} \geq \frac{1}{5}.$$

c. Montrer que la série n'est pas uniformément convergente sur $\mathbb{R}^+$.

Exercice 24. On considère la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{1+nx}$.

a. Montrer que la série converge simplement sur $\mathbb{R}^{*+}$.

b. Montrer que sa somme $x \mapsto S(x)$ est continue.

c. Calculer $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} S(x)$.

d. Montrer que S est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^{*+}$.

Exercice 25. *(fonction ζ de Riemann).* On définit la fonction ζ par

$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}.$$

a. Montrer que ζ est une fonction $\mathcal{C}^\infty$ sur tout intervalle de la forme $[a, +\infty[$, où $a > 1$.

b. Montrer que pour tout $x > 1$ et tout $k \geq 1$,

$$\frac{1}{(k+1)^x} \leq \int_k^{k+1} \frac{dt}{t^x} \leq \frac{1}{k^x}.$$

En déduire que :

$$\forall\, x > 1,\ \zeta(x) - 1 \leq \frac{1}{x-1} \leq \zeta(x).$$

c. Donner la limite de $\zeta(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

d. Donner un équivalent de $\zeta(x)$ lorsque x tend vers 1^+.

Exercice 26. **a.** Montrer que la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} t^n \ln t$ converge simplement sur $]0, 1[$ vers la fonction $\dfrac{\ln t}{1-t}$.

b. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 t^n \ln t\, dt$ converge et calculer sa valeur pour tout n.

c. Montrer que

$$\int_0^1 \frac{\ln t}{t-1} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)^2}$$

(on montrera la convergence de l'intégrale impropre).