Chapitre : Généralités sur les fonctions.

I Un peu d'histoire.

La définition du concept de fonction a évolué depuis son introduction par Leibniz à la fin du $XVII^{ième}$ siècle. Il s'agissait alors d'associer un objet à chaque point d'une courbe, par exemple la tangente. En identifiant chaque point de la courbe avec son ordonnée, Jean Bernoulli puis Euler redéfinissent ensuite ce terme pour décrire une expression composée d'une variable et d'éventuels paramètres constants (réels). Les opérations utilisées comprennent non seulement les opérations algébriques élémentaires, les séries et produits infinis mais aussi l'exponentielle, le logarithme et les lignes trigonométriques, considérés comme des opérations transcendantes.

Le lien entre l'expression d'une fonction et sa courbe représentative conduit Euler à élargir la notion en admettant des définitions par morceaux, puis des courbes qui ne peuvent être obtenues par des expressions analytiques. La condition de continuité est formalisée par Bolzano et Cauchy au début du $XIX^{ième}$ siècle. En 1829, l'étude des séries de Fourier conduit Dirichlet à considérer des fonctions plus générales, telle que l'indicatrice des rationnels. (Wikipédia)

II Attendus

- Déterminer qu'une fonction est continue : *(page 69)*
  - "empiriquement" en regardant le graphique.
  - En utilisant les théorèmes usuelles sur les fonctions continues.
- Utiliser le théorème des valeurs intermédiaires pour trouver :
  - Le nombre de solutions d'une équation du type $f(x) = k$. *(page 71)*
  - Un première encadrement de ces solutions.
- Déterminer un encadrement à une précision 10^{-n} donnée, d'une équation du type $f(x) = k$ à l'aide de la calculatrice soit par un graphique soit par un tableau de valeurs.
- Étudier une fonction : dérivée, signe, tableau de variations...
- Savoir lire graphiquement les valeurs de $f(a)$ (image) et $f'(a)$ (coefficient directeur de la tangente en a).
- Savoir utiliser ces valeurs pour déterminer des équations sur les paramètres d'une fonctions qui ne serait pas données.
- Savoir résoudre le système d'équation ainsi obtenue pour déterminer l'expression d'une fonction. *(page 67)*
- Savoir associer une fonction à sa dérivée *(page 65)* :
  - Les variations de f donnent le signe de f' et inversement.
  - Les racine de f' peuvent donner les extremums de f.
  - Les valeurs de f' donnent les coefficients directeurs des tangentes à $\mathcal{C}_f$ et inversement.
- Savoir faire l'inverse.
- Savoir déterminer la convexité d'une fonction par :
  - Lecture graphique. *(page 115)*
  - En déterminant les variations de f' (si f' croissante alors f convexe et ...) *page 117*
  - Á partir du signe de f'' (positif alors f convexe et ...). *(page 117)*
- Utiliser la convexité pour en déduire des inégalités (puisque les tangentes sont en dessous de $\mathcal{C}_f$ si f est convexe et inversement si f est concave.) *(page 115)*
- Étudier la position relative d'une droite (d'équation $y = ax + b$) et d'une courbe $\mathcal{C}_f$ par l'étude de la différence $f(x) - (ax + b)$.

III Continuité

A Généralités.

Définition 1

On dira d'une **fonction** définie sur un intervalle I et de courbe représentative $\mathcal{C}_f$ qu'elle est continue sur I si l'on peut tracer sa courbe $\mathcal{C}_f$ "sans lever le crayon".

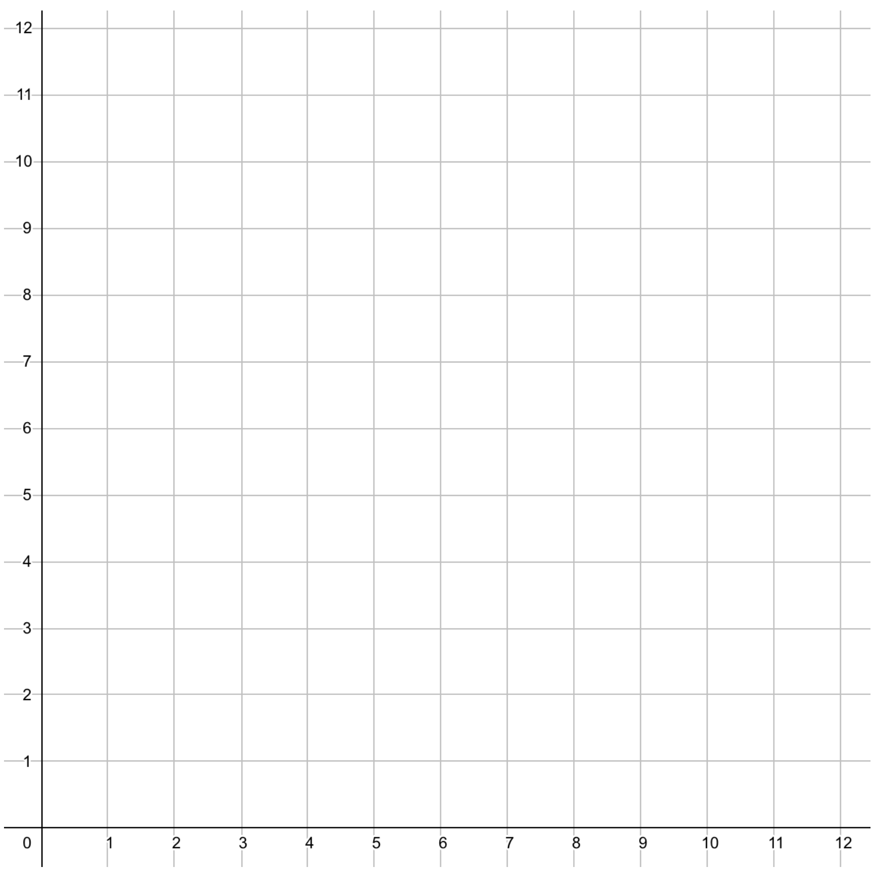
Exemple 1. Les fonctions de référence :

- Carré est continue sur $\mathbb{R}$.
- Cube est continue sur $\mathbb{R}$.
- Racine est continue sur $\mathbb{R}^+$.
- Inverse est continue sur chacun des intervalles $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$.
- Exponentielle est continue sur $\mathbb{R}$.
- Logarithme est continue sur $]0, = \infty[$.

Vidéo 1

Exemple et contre exemple de fonction continue : `https://youtu.be/XpjKserte6o`
Déterminer si une fonction est continue : `https://youtu.be/gLmACk8BpAE`

Exemple 2. Une patinoire pointe chaque client à l'entrée et à la sortie de la patinoire. Elle décide de facturer chaque heure sur la glace au tarif de 1 € mais la mairie finance la première heure. Cette première n'est donc pas facturé au client. En revanche, chaque heure commencée est facturée entièrement. Compléter le graphique suivant (sachant que l'on ne peut pas rester plus de 12h puisque la patinoire n'est ouverte que de midi à minuit) :



Si l'on E la fonction précédente définie sur $I = [0; 12[$, cette fonction n'est pas continue sur I. On remarque en revanche qu'elle est continue sur $[0; 1[$ par exemple puisque sur cet intervalle nous pouvons tracer la représentation "sans lever le crayon".

1 Continuité et dérivabilité.

Proposition 1

Toute fonction dérivable sur un intervalle I est continue sur I.

2 Continuité et fonctions usuelles.

Théorème 2

Est continue l'ensemble des fonctions usuelles déjà vues :

- La fonction carré sur $\mathbb{R}$.
- La fonction racine sur $\mathbb{R}^+$.
- La fonction inverse sur $\mathbb{R}^*$.
- Les fonctions exponentielles sur $\mathbb{R}$.
- Les fonctions logarithmes sur $\mathbb{R}^{+*}$.

3 Opérations sur les fonctions continues.

Théorème 3

" Théorème usuel sur les fonctions continues " : Est continue :

- Somme de fonctions continues.
- Produit d'une fonction continue par un nombre.
- Produit de fonctions continues.
- Composée de fonctions continues.

Ex 51-57 page 76

B Théorème des valeurs intermédiaires.

Théorème 4

Soit f une fonction continue sur un intervalle I et soient a et b deux nombres réels de I. Pour tout nombre réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe au moins un antécédent c entre a et b tel que donc $f(c) = k$.

Proposition 5

Avec les notations du théorème précédent, si de plus f est strictement monotone sur $[a, b]$ alors l'antécédent c tel que $f(c) = k$ est **unique**.

Méthode 1

Si l'on considère a fonction f définie sur l'intervalle $I = [-3; 2]$ par l'expression $f(x) = x^3 - 3x + 3$.
L'expression de la dérivée est $f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x-1)(x = 1)$.
On obtient donc le tableau de variation :

x	-3		-1		1		2
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	-15	$\nearrow$	5	$\searrow$	1	$\nearrow$	5

Pour trouver le nombre de solution de $f(x) = 0$ par exemple et un encadrement de cette solution.
On peut ajouter dans le tableau de variation :

x	-3	α	-1		1		2
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	-15	0	5	$\searrow$	1	$\nearrow$	5

La rédaction appropriée est alors :
"D'après le tableau de variation précédent l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α sur l'intervalle $[-3; 2]$ et cette solution est comprise entre -3 et -1. (c'est-à-dire $\alpha \in [-3, -1]$."
En effet :

- Sur $[-3, -1]$, on a $f(x) \in [-15; 5]$ et est strictement croissante. Or $0 \in [-15; 5]$ donc $f(x) = 0$ admet une unique solution.
- Sur $[-1, 1]$, on a $f(x) \in [1; 5]$ et est strictement décroissante. Or $0 \notin [1; 5]$ donc $f(x) = 0$ n'admet pas de solution.
- Sur $[1, 2]$, on a $f(x) \in [-1; 5]$ et est strictement croissante. Or $0 \notin [1; 5]$ donc $f(x) = 0$ n'admet pas de solution.
  Pour trouver le nombre de solution de $f(x) = 3$ par exemple et un encadrement de ces solutions.
  On peut ajouter dans le tableau de variation :

x	-3	α	-1	β	1	γ	2
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	-15	3	5	3	1	3	5

La rédaction appropriée est alors :
"D'après le tableau de variation précédent l'équation $f(x) = 3$ admet trois solutions :

- α sur l'intervalle $[-3; -1]$.
- β sur l'intervalle $[-1; 1]$. D'ailleurs cette solution est évidente car $f(0) = 3$.
- γ sur l'intervalle $[1; 2]$. "

Vidéo 2

Méthode en vidéo : `https://youtu.be/fkd7c3IAc3Y` et `https://youtu.be/UmGQf7gkvLg`

Méthode 2

On peut déterminer une valeur approchée de la solution d'une équation en utilisant la calculatrice soit avec sa représentation, soit avec un tableau de valeurs.

Vidéo 3

- Pour TI : `https://youtu.be/MEkh0fxPakk`
- Pour Casio : `https://youtu.be/XEZ5D19FpDQ`
- Pour HP : `https://youtu.be/93mBoNOpEWg`

Ex 58 à 71 page 77

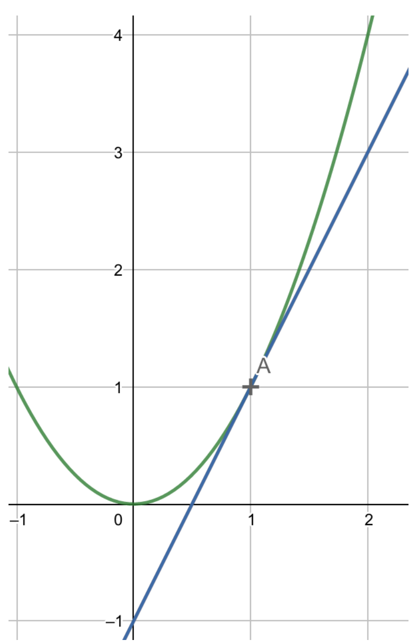
IV Dérivabilité.

A Tangente.

Définition 2

Définition empirique : Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle I, a un réel à *" l'intérieur"* de I, $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f et enfin A le point de $\mathcal{C}$ d'abscisse a.
On dira que la droite T est tangente à $\mathcal{C}$ en a, si T passe par le point A et *"suit la courbe $\mathcal{C}$ au plus propre."*

Exemple 3. Si l'on considère la fonction carré $f(x) = x^2$. On peut par exemple tracer approximativement la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point A de $\mathcal{C}_f$ d'abscisse 1 :



B Nombre dérivée et fonction dérivée.

Définition 3

Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle I et a un réel à *" l'intérieur"* de I.

- On dira que f est dérivable à a si la fonction $x \mapsto \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ admet une limite en a. Cette fonction est appelée taux d'accroissement de f en a. Ce nombre est appelé nombre dérivé de f en a et est noté $f'(a)$.
- On dira que f est dérivable sur I, f admet un nombre dérivé pour toute valeur dans I. La fonction dérivée est la fonction notée f' qui à tout x de I associe le nombre $f'(x)$.

Exemple 4. Si l'on considère la fonction carré $f(x) = x^2$. On obtient comme taux d'accroissement de f en 1 :

$$\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \frac{x^2-1}{x-1} = \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = x+1$$

Or cette expression admet en 1 une limite évidente qui est 2. On dira donc que $f'(1) = 2$.
Plus généralement, on pourra démontrer que le taux d'accroissement de $f(x) = x^2$ en a est toujours $2a$. Cela nous permet d'affirmer que $f'(x) = 2x$.

Remarque 1. L'ensemble des dérivées usuelles ont déjà été rappelé dans un tableau récapitulatif.

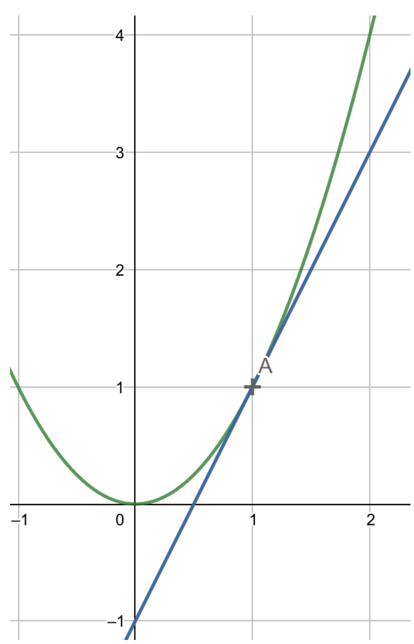
C Nombre dérivée et tangente.

Proposition 6

Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle I, dérivable en a un réel à *" l'intérieur"* de I, $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f et enfin A le point de $\mathcal{C}$ d'abscisse a . Alors $f'(a)$ est le coefficient directeur de la tangente à $\mathcal{C}$ en a.
L'équation de la tangente en a est alors donnée par l'équation :

$$y = f'(a)(x-a) + f(a)$$

Exemple 5. Si l'on considère la fonction carré $f(x) = x^2$. On peut par exemple tracer approximativement la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point A de $\mathcal{C}_f$ d'abscisse 1 :



On sait que $f'(1) = 2 \times 1 = 2$ et $f(1) = 1$. En appliquant la formule de la propriété précédente, on obtient l'équation :

$$y = f'(1)(x-1) + f(1) = 2(x-1) + 1 = 2x - 1$$

On vérifie facilement par lecture graphique que cette équation est bien l'équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ en 1.

Méthode 3

On peut déterminer graphiquement un nombre dérivée et déterminer le coefficient directeur de la tangente par lecture graphique (voir exemple précédent)

Méthode 4

Si l'on considère la fonction $f(x) = xe^{(x-2)}$.
Pour déterminer l'équation de la tangente en 2 :
$1^{ière}$ **étape :**
On commence par déterminer l'expression de f' :

$$f'(x) = e^{(x-2)} + xe^{(x-2)} = (1+x)e^{(x-2)}$$

$2^{ième}$ **étape :**

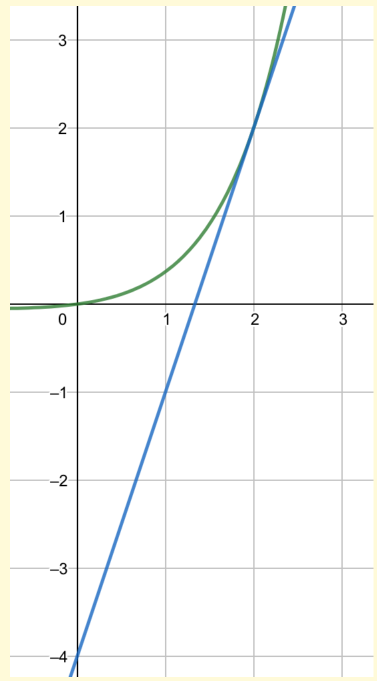
On calcul $f(2) = 2e^0 = 2$ et $f'(2) = (1+2)e^0 = 3$.

$3^{ième}$ **étape :**

Ensuite on applique la formule précédente pour trouver la tangente en 2 :

$T : y = f'(2)(x-2) + f(2) = 3(x-2) + 2 = 3x - 4$

On peut tracer à l'écran de sa machine obtenir $\mathcal{C}$ et T. On vérifie ainsi facilement que nous ne nous sommes pas trompé lors de la détermination de l'équation de T.



Méthode 5

Pour déterminer l'expression d'une fonction à partir de donnée graphique sur la fonction et sa dérivée. Exemple traité en exercice : Soit $f(x) = (ax+b)e^{2x-1}$ avec $y - \frac{1}{2}$ tangente à $\mathcal{C}_f$ au point de coordonnées $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. Alors, on a $f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$ et $f'(\frac{1}{2}) = 0$ puis on en a déduire un système d'équation sur a et b. Pour trouver l'expression de $f(x) = (-x+1)e^{2x-1}$.

Ex 29 à 37 page 74

D Fonction dérivée et variation.

Au vue de ce que représente la dérivée (les coefficients directeurs des tangentes au point de la courbe), on peut comprendre simplement la proposition suivante :

Proposition 7

Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I. Alors :

- Si $f'(x) \geqslant 0$ alors f est croissante sur I.
- Si $f'(x) \leqslant 0$ alors f est décroissante sur I.

Vidéo 4

Éxemple d'étude de fonction :
`https://www.youtube.com/playlist?list=PLVUDmbpupCaoP_sqT3BQ3Q6oTr6QXodUt`

Ex 38 à 50 page 75

V Convexité.

Vidéo 5

`https://youtu.be/ERML85y_s6E`

A Convexité et tangentes.

Définition 4

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle Iet $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f. On dira que f est :

- Convexe sur I si $\mathcal{C}$ est systématiquement au dessus de toutes ses tangentes.
- Convexe sur I si $\mathcal{C}$ est systématiquement en dessous de toutes ses tangentes.

Exemple 6. La fonction carré semble convexe sur $\mathbb{R}$.

Exemple 7. Si l'on considère le trinôme $f(x) = ax^2 + bx + c$. Ce trinôme sera convexe si $a > 0$ et concave si $a < 0$.

Exemple 8. Si l'on considère la fonction $f(x) = xe^{(x-2)}$ définie dans l'exemple ci-dessous. Il **semble graphiquement** que cette fonction soit convexe sur l'intervalle $[0; 2]$.

Exemple 9. La fonction de référence racine semble concave sur $[0, +\infty[$.

Ex 30 à 41 page 122

B Convexité et dérivées.

Proposition 8

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I. Alors :

- f est convexe sur I si et seulement si f' est croissante sur I.
- f est concave sur I si et seulement si f' est décroissante sur I.

Si l'on reprend les exemples précédents :

Exemple 10. La fonction carré semble sur $\mathbb{R}$ admet $f'(x) = 2x$ comme dérivée Dès lors, puisque $'f$ est croissante (c'est une fonction affine dont le coefficeint directeur est 2 est positive), nous pouvons affirmer que la fonction f est convexe.

Exemple 11. Si l'on considère le trinôme $f(x) = ax^2 + bx + c$. Ce trinôme sera convexe si $a > 0$ et concave si $a < 0$. En effet, $f'(x) = 2ax + b$ et donc si $a > 0$ alors f' est croissante et si $a < 0$ alors f' est décroissante.

Vidéo 6

Exemple d'utilisation de la convexité pour résoudre un problème : `https://youtu.be/_XlgCeLcN1k`

Ex 42 à 47 page 123

C Convexité et dérivée seconde.

Corolaire 9

Soit f une fonction deux fois dérivable sur un intervalle I. Alors :

- f est convexe sur I si et seulement si f'' est positive sur I (c'est-à-dire $f''(x) \geqslant 0$ pour tout x de I.
- f est concave sur I si et seulement si f'' est négative sur I (c'est-à-dire $f''(x) \leqslant 0$ pour tout x de I.

Si l'on reprend les exemples précédents :

Exemple 12. La fonction carré est convexe sur $\mathbb{R}$ puisque $f''(x) = 2 > 0$.

Exemple 13. Si l'on considère le trinôme $f(x) = ax^2 + bx + c$. On a $f''(x) = 2x$. Ce trinôme sera convexe si $a > 0$ et concave si $a < 0$.

Exemple 14. Si l'on considère la fonction $f(x) = xe^{(x-2)}$ définie dans l'exemple ci-dessous. On déterminer $f'(x) = (x+1)e^{x-2)}$ et donc :

$$f''(x) = e^{x-2)} + (x+1)e^{x-2)} = (x+2)e^{x-2)}$$

Donc f est convexe sur l'intervalle $[2; +\infty[$ (c'est-à-dire que ces tangentes sont en dessous de sa représentation sur $[2; +\infty[$) et concave sur l'intervalle $]-\infty; 2]$ (c'est-à-dire que ces tangentes sont au dessus de sa représentation sur $]-\infty; 2]$).

Exemple 15. La fonction de référence racine est concave sur $[0, +\infty[$. On a $f'(x) = \frac{1}{2}x^{\frac{-1}{2}}$ donc $f''(x) = \frac{-1}{4}x^{\frac{3}{2}} < 0$. Donc la fonction racine est bien concave.

Vidéo 7

`https://youtu.be/8H2aYKN8NGE`

Ex 48 à 60 page 124

D Point d'inflexion.

Définition 5

Soit f une fonction deux fois dérivable sur un intervalle I et $A(a, f(a))$ un point de la représentation graphique $\mathcal{C}$ de f. On dira que A est un point d'inflexion de $\mathcal{C}$, si la tangente en A *"traverse"* la courbe $\mathcal{C}$.

Proposition 10

Soit f une fonction deux fois dérivable sur un intervalle I et $A(a, f(a))$ un point de la représentation graphique $\mathcal{C}$ de f. Alors pour que A soit un point d'inflexion, il faut et il suffit que l'une des deux propriétés suivantes soit vérifiées :

- Les variations de f' s'inverse en a.
- f'' change de signe en a.

Vidéo 8

`https://youtu.be/r8sYr6ToeLo`

E Position relative entre courbes.

1 Entre courbes.

Méthode 6

Soient deux fonction f et g définies sur un intervalle I. Pour déterminer la position relative de $\mathcal{C}_f$ par rapport à $\mathcal{C}_g$, on étudie le signe de $f - g$ sur l'intervalle I.

2 Entre courbe et droite.

Méthode 7

Pour déterminer la position relative entre une courbe et une droite d'équation $y = ax + b$:

- Pour une droite quelconque : On étudie comme précédemment le signe de $f(x) - (ax + b)$.
- Pour une tangente en un point $A(a, f(a))$ de $\mathcal{C}_f$, on regarde la convexité de f :
  - Si f est convexe alors la tangente est en dessous de $\mathcal{C}_f$.
  - Si f est concave alors la tangente est au dessus de $\mathcal{C}_f$.
  - Si A est un point d'inflexion :
    - Si a est un maximum pour f alors la courbe est au dessus de la tangente avant a puis en dessous après a.
    - Si a est un minimum pour f alors la courbe est en dessous de la tangente avant a puis au dessus après a.