

Chapitre 7 : Fonction trigonométrie.

Notation : Dans l'ensemble du chapitre, on considérera \mathcal{P} le plan, repéré par le repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) .

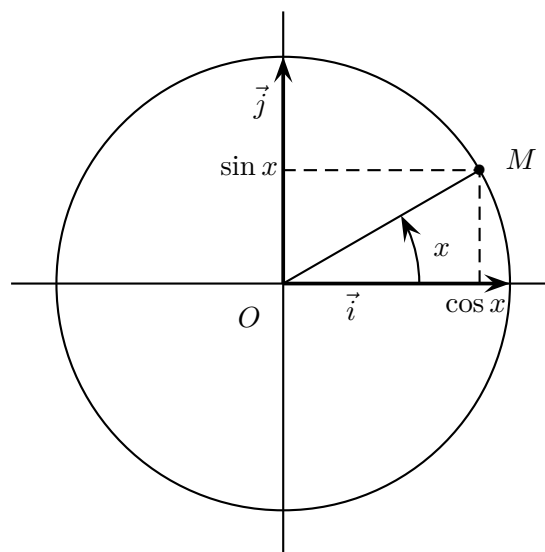
I Fonction circulaire : sinus et cosinus

A Définition.

Définition 1

On considère le cercle trigonométrique \mathcal{C} , I le point de \mathcal{C} de coordonnées $(1, 0)$ et M un point quelconque de \mathcal{C} , et enfin x une mesure en radian de l'angle orienté $(\vec{OI}; \vec{OM})$. Alors les coordonnées du point M sont appelées respectivement le cosinus et sinus de l'angle orienté $(\vec{OI}; \vec{OM})$.

On notera :

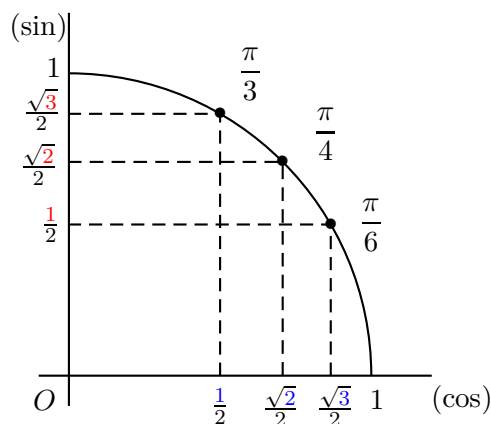


$$M(\cos x, \sin x)$$

B Valeurs particulières.

À l'aide de l'exercice précédent et de propriétés graphiques nous pouvons en déduire les valeurs ci-dessous :

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0



Vidéo 1

- Exemple 1

- Exemple 2

C Propriétés.

Proposition 1

Soient $x \in \mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{Z}$, on a :

- $-1 \leq \cos x \leq 1.$
- $-1 \leq \sin x \leq 1.$
- $\cos(x + 2k\pi) = \cos(x).$
- $\sin(x + 2k\pi) = \cos(x).$
- $\cos^2 x + \sin^2 x = 1.$

D Formules trigonométrique des angles associés.

Proposition 2

pour tout nombre réel réel x , on a :

- $\cos(-x) = \cos(x)$ (cos est pair)
- $\cos(\pi - x) = -\cos(x)$
- $\cos(x + \pi) = -\cos(x)$
- $\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin(x)$
- $\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin(x)$
- $\sin(-x) = -\sin(x)$ (sin est impair)
- $\sin(\pi - x) = \sin(x)$
- $\sin(x + \pi) = -\sin(x)$
- $\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos(x)$
- $\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos(x)$

Remarque 1. Attention ces formules ne sont pas forcément à apprendre, mais surtout il faut savoir les retrouver. Voir la méthode ci-dessous et aussi page 190 du livre.

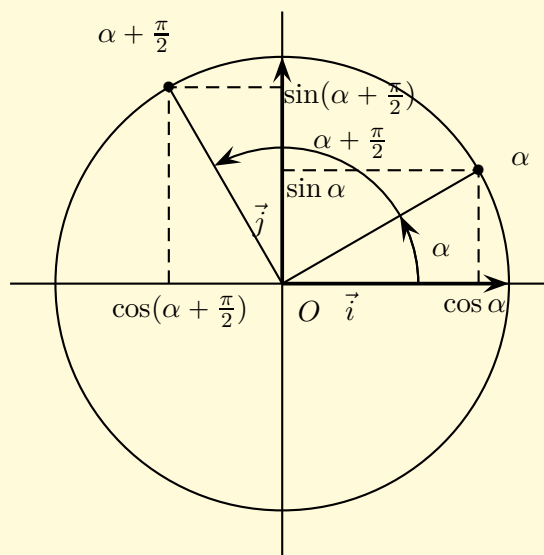
Méthode 1

Pour retrouver la simplification de $\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)$ par exemple. On commence par tracer l'angle $\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)$ sur le cercle trigonométrique. Ensuite remarque l'égalité entre les longueurs :

- OD (égale à l'opposé du cosinus de l'angle $\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)$ sur le graphique de droite)
- et OA (qui elle est égale au sinus de l'angle x sur le graphique de droite)

On obtient donc bien la formule :

$$\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin(\alpha)$$



E Résolution d'équations trigonométriques.

Proposition 3

Soit a un nombre réel. Alors :

- L'équation $\cos x = \cos a$ aura pour solution les nombres réels :

$$x = a + 2k\pi \quad \text{et} \quad x = -a + 2k\pi \quad \text{où } k \in \mathbb{Z}$$

- L'équation $\cos x = \sin a$ aura pour solution les nombres réels :

$$x = a + 2k\pi \quad \text{et} \quad x = \pi - a + 2k\pi \quad \text{où } k \in \mathbb{Z}$$

Remarque 2. L'équation $\cos x = \sin y$ peut se résoudre en utilisant la formule $\cos\left(\frac{\pi}{2} - y\right) = \sin(y)$.
Donc l'équation devient :

$$\cos x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - y\right) \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{\pi}{2} - y + 2k\pi \\ \text{ou} \\ x = -\frac{\pi}{2} + y + 2k\pi \end{cases} \quad \text{où } k \in \mathbb{Z}$$

Méthode 2 (Résolution d'équation trigonométrique)

Résoudre sur \mathbb{R} l'équation :

$$\cos\left(3x + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

1^{ère} **étape** : On cherche un antécédent de $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

A l'aide du tableau de valeurs, on obtient :

$$\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} = \cos\left(3x + \frac{\pi}{2}\right)$$

2^{ème} **étape** : On utilise la proposition précédente :

$$\cos\left(3x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} 3x + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \\ \text{ou} \\ 3x + \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \end{cases}$$

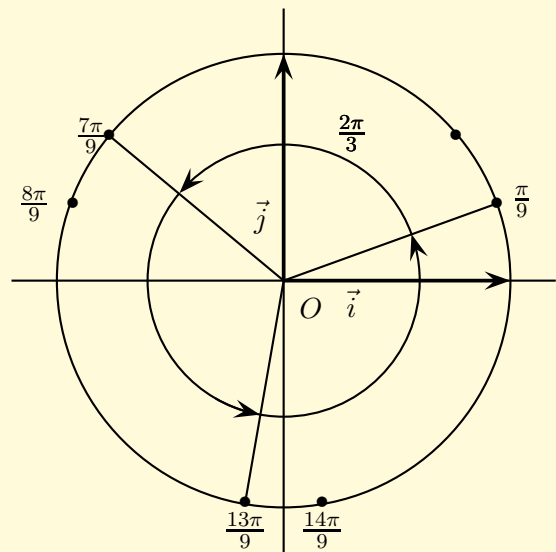
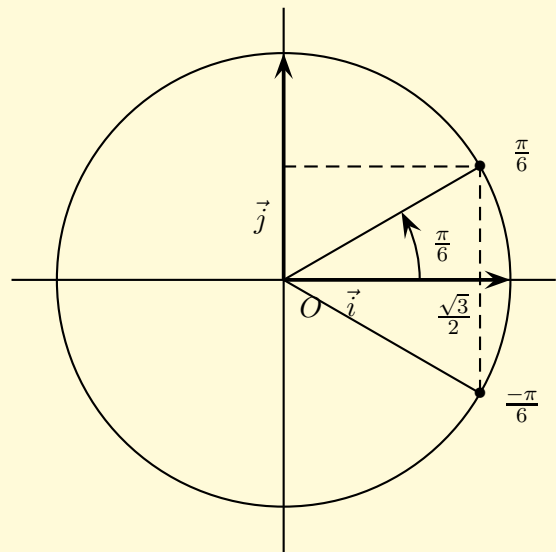
3^{ème} **étape** : On résout les équations ainsi obtenues :

$$\cos\left(3x + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x = \frac{-\pi}{3} + 2k\pi \\ \text{ou} \\ 3x = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{-\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3} \\ \text{ou} \\ x = -\frac{2\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3} \end{cases}$$

4^{ème} **étape** : Placer les points sur le cercle trigonométrique correspondant au angle solution de l'équation :

Pour la première équation $x = \frac{-\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3}$, On obtient A pour $k = 0$. Puis pour les points C (obtenu pour $k = 1$) et E (obtenu pour $k = 2$) on procède en ajoutant l'angle $\frac{2\pi}{3}$.

Pour la deuxième équation $x = -\frac{2\pi}{9} + \frac{2k\pi}{3}$, On obtient G pour $k = 0$. Puis pour les points K (obtenu pour $k = 1$) et M (obtenu pour $k = 2$) on procède en ajoutant l'angle $\frac{2\pi}{3}$.

**Vidéo 2**

Résoudre une équation trigonométrique

Méthode 3 (Résolution d'inéquation trigonométrique)

Résoudre sur l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ l'inéquation :

$$\cos\left(3x + \frac{\pi}{2}\right) \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$$

1^{ère} **étape** : On pose $X = 3x + \frac{\pi}{2}$ pour résoudre

dans un premier temps $\cos(X) \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$ Avec :

$$x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \Leftrightarrow 3x \in \left[-\frac{3\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right] \Leftrightarrow X = 3x + \frac{\pi}{2} \in [-\pi, 2\pi]$$

2^{ème} **étape** : On utilise le cercle trigonométrique pour résoudre l'inégalité précédente en X :

Puisque $X \in [-\pi, 2\pi]$, avec le graphique si dessus

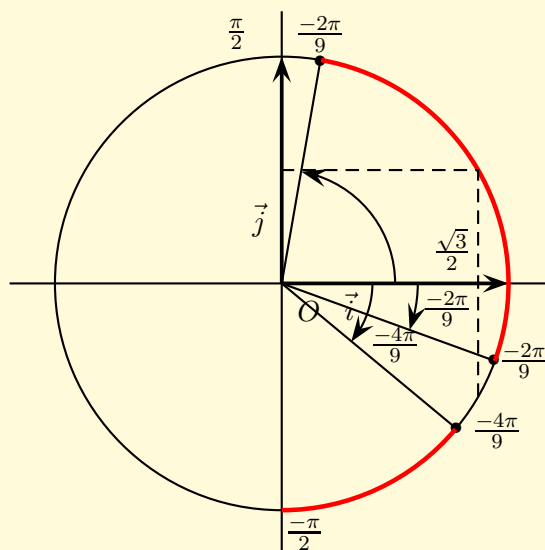
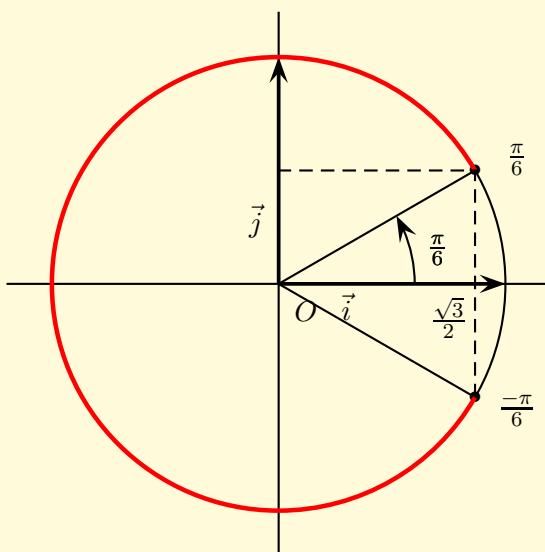
l'on obtient que $\cos(X) \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$ si $X \in \left[-\pi, -\frac{\pi}{6}\right] \cup$

$$\left[\frac{\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}\right].$$

3^{ème} **étape** : On a plus qu'à résoudre en x :

$$\begin{aligned} X = 3x + \frac{\pi}{2} \in \left[-\pi, -\frac{\pi}{6}\right] \cup \left[\frac{\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}\right] &\Leftrightarrow 3x \in \left[-\frac{3\pi}{2}, -\frac{2\pi}{3}\right] \cup \left[-\frac{\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\right] \\ &\Leftrightarrow x \in \left[-\frac{\pi}{2}, -\frac{2\pi}{9}\right] \cup \left[-\frac{\pi}{9}, \frac{4\pi}{9}\right] \end{aligned}$$

4^{ème} **étape** : On peut placer les solutions sur le cercle trigonométrique :



F Les fonctions circulaires

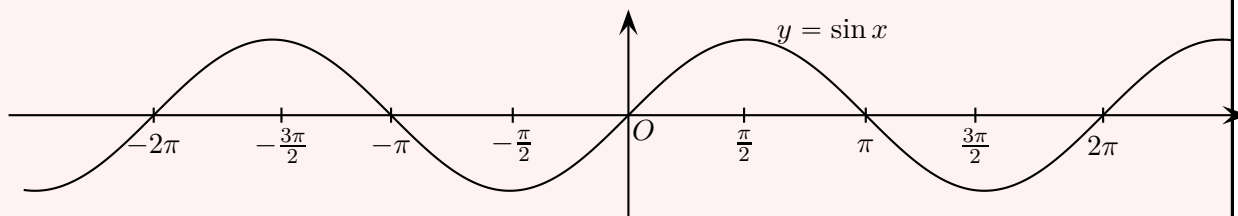
Proposition 4 (La fonction sinus.)

La fonction sin vérifie les propriétés :

- La fonction sinus est 2π -périodique : $\forall x \in \mathbb{R}, \sin(x + 2\pi) = \sin(x)$.
- La fonction sinus est impaire : $\forall x \in \mathbb{R}, \sin(-x) = -\sin(x)$
- La fonction sinus est dérivable $\forall x \in \mathbb{R}, \sin'(x) = \cos(x)$
- Tableau de variation :

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π
$\cos(x)$		+	-
$\sin(x)$	0	1	0

- Représentation graphique :



Proposition 5 (La fonction cosinus.)

La fonction cos vérifie les propriétés :

- La fonction cosinus est 2π -périodique : $\forall x \in \mathbb{R}, \cos(x + 2\pi) = \cos(x)$.
- La fonction cosinus est paire : $\forall x \in \mathbb{R}, \cos(-x) = \cos(x)$
- La fonction sinus est dérivable $\forall x \in \mathbb{R}, \cos'(x) = -\sin(x)$, et si $u : I \rightarrow \mathbb{R}$ dérivable sur l'intervalle I alors : $\forall x \in \mathbb{R}, \cos'(u(x)) = -u'(x) \sin(u(x))$
- Tableau de variation :

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π
$-\sin(x)$		-	
$\cos(x)$	1	0	-1

- Représentation graphique :

